质量技术监督高校教材

编 审 委 员 会

出版前言

随着我国加入世界贸易组织，社会主义市场经济和质量技术监督事业的迅速发展，迫切需要大量的质量技术监督专业人才。质量技术监督高等专业教育在质量技术监督教育事业中占有重要地位，对提高在职人员的素质、改善队伍结构、培养新生力量具有重要意义。大力发展质量技术监督高等专业教育，将对质量技术监督事业产生深远的影响。

近年来，全国各地质量技术监督院校办学条件不断改善，招生规模不断扩大，教学质量和水平不断提高。与此同时，在质量技术监督教育中，高等教育所占比重不断增大。为了适应这种形势，加快质量技术监督院校教材建设的步伐，根据质量技术监督院校对专业提材的实际需求，我们组织全国质量技术监督及相关院校和单位编写了有关标准化、计量、质量等方面的系列专业基础课和专业课教材。

这套教材主要是根据质量技术监督高等专业教育的需要编写的。在目前情况下，存在多种形式的质量技术监督高等和中等专业教育，因此，在编写过程中从内容选取、结构设计、深浅程度等方面考虑了适用的多样性。质量技术监督普通中等专业教育、职业教育和人员技术培训等，可参考本套教材的基本内容，适当调整使用。

原国家质量技术监督局政策法规宣件教育司进行了木套教材的前期组编工作。参加教材审定工作的院校和单位有：中国计量学院、河北大学质量技术监督学院、四川省技术监督学校、山东省质量工程学提、广西计量学校、河南省质量工程学校、天津市渤海职业中等专业学校、吉林省提术监督职工中专学校、北京市

质量技术监督培训中心等。在教材的编写、审定等工作中，中国计量出版社、河北大学质量技术监督学院等单位做了很多具体、细致的工作。

这套教材的编写工作是在时间紧、难度大的情况下进行的，虽然经过多方面的努力，但仍可能存在很多不足之处，甚至于错误，我们拟在使用过程中听取各方面意见，于适当时机组织修订。

国家质量监督检验检疫总局人事司
2003年4月

编者的话

计量测试技术与仪器、产品质量检验技术、质量工程等质量技术监督工作都是以保证量值准确可靠为前提的，而“准”的定量表示就是误差和测量不确定度。《误差理论与测量不确定度评定》是质量技术监督类专业学生必修的一门十分重要的专业基础课，同时，又是检测技术与仪器、精密仪器、精密测试、光学技术与光电仪器、自动化仪表等测控技术与仪器类专业的重要技术基础课。该课程涉及面广，实用性强。

本书注重理论与测量实践相结合，书中配有较多应用实例，以方便学生理解和使用；有关术语及测量不确定度的评定方法符合最新国际标准和国家计量技术规范，反映了误差理论与测量不确定度的最新研究成果。重点参照的技术规范有：ISO 等 7 个国际组织联合发布的《测量不确定度表示指南》；JJF1059—1999《测量不确度度评定与表示》；国家质量技术监督局计量司组编的 JJF1059—1999 宣贯教材《测量不确定度评定与表示指南》。

本书系统地阐述了误差理论、测量不确定度的评定和测量数据的处理方法。内容包括：绪论、误差的基本概念、误差的性质、测量不确定度的评定与表示、直接测量数据的处理、间接测量数据的处理、线性参数的最小二乘法处理、回归分析。各章附有习题供使用者选用。书后附有常用数据表。本书建议教学课时为 54 课时，如作为高职高专教材，可增加到 72 课时。

参加本书编写的有河北大学李金海（绪论、第一、四、五章），朱爱民、王宝军（第二章），曹锁胜（第三章）；中国计量学院顾龙芳（第六、九章）；四川技术监督学校曾达（第七、八章）。全书由李金海统稿。

本书由中国计量科学研究院原总工器师施昌彦研究员主审。

参加审稿的还有福建省计量科学技术研究所原副所长潘汉瓦高级工程师，中国计量出版社李素琴编辑。他们对书稿做了认真仔细的审阅，提出了大量宝贵的指导性意见，施昌彦先生还无私贡献出自己多年的研究成果供编者使用，使我们深深感佩于他的高尚品质。在此，我们一并表示衷心的感谢。

测量不确定度的概念相对较新，并且还在不断完善。而传统的误差理论与现行的测量不确定度概念的合理对接还是一个正在探讨的问题，加之编者水平有限，书中不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2003 年 9 月

目　　录

绪　论

一、测量误差的概念

众所周知，在自然科学中，人们通过测量得到对事物的认识，没有测量就没有科学。测量是人类认识自然和改造自然的重要手段，在国民经济中起着重要的作用。然而我们对自然界的所有的量进行实验和测量时，由于参与测量的五个要素：测量装置(或测量仪器)、测量人员、测量方法、测量环境和被测对象自身都不能够做到完美无缺，使得对该量的测量结果与该量的真实值之间就存在一个差异，这个差异反映在数学上就是测量误差。

例如，用台式血压计测量人体血压，测得值的高低压分别为16kPa和12kPa。分析其测量误差：由于血压计在加工、制造过程中刻度标尺不可能刻得绝对均匀和准确而存在刻线误差，贮汞瓶和测量管的内径不可能加工得绝对均匀和准确而存在容器比的误差，测量管标尺、外壳在安装过程中不可能都做到90°垂直而存在不垂直误差等等，使得血压计自身存在一个固有误差；血压计的设计参数采用温度20℃，重力加速度9.8m/s²，其实际使用环境条件根本无法满足，从而产生一个环境条件误差；用血压计测量血压要求测量者听、看、读三者同步，实际测量时要做到绝对同步是不可能的，而给测量血压带来一个测量误差；由于人眼的分辨率最多只能读出分度值的1/10(通常是1/5)，而给测量血压带来一个测量人员的读数误差；被测量者的血压值不仅受患者疾病因素的影响，同时还受被测量者的情绪、运动程度、测量时间等外界因素的影响，使被测量者的自身血压也在变化。基于上述这些误差因素的影响，致使测量得到的血压值与被测量者的客观实际血压值存在一定的差异，要么略高于测量结果，要么略低于测量结果。但可以断定被测量者的实际血压绝不会恰好是16kPa和12kPa，这个数值上的差异就是血压的测量误差。

测量误差大小的评估或测量不确定度的评定(即测量误差范围的估计)正是误差理论与数据处理研究的内容。

二、误差公理

对某量进行实验或测量时，根据被测对象的特点和有关要求、往往可以选择不同的测量仪器、不同的测量方法、不同的测量环境、不同的测量人员来进行测量。例如测量某孔的内径可用千分尺，也可用内径百分表在自然温度下测量，还可以用准确度高的工具显微镜在恒温室内进行测量。又如测量某一物体的质量时，我们既可以用台秤、案秤、电子计价秤在自然温度下测量，也可以采用不同等级的天平在恒温条件20℃下进行测量，用天平测量物体质量时既可选用直接测量法，又可选用替代法或交换法进行测量。

实验证明，无论选用哪种测量方法，采用何种测量仪器，其测量结果总含有误差。即使在进行高准确度的测量时，也会经常发现同一被测对象的这一次测量和那一次测量的结果不完全相同；用这一台仪器和用那一台仪器测得的结果不完全相同；在这个环境和那个环境测得的结果不完全相同；甚至同一个测量人员，在相同的环境里，用同一台仪器进行的两次测量，其结果也不完全相同。这些现象说明，每一次测量都存在误差，且这些误差又不一定相等，以致被测对象只是一个，而测得的结果却往往不同。当测量方法先进，测量仪器准确时，测得的结果会更接近被测对象的实际状态，此时测量的误差小、准确度高。但是，任何先进的测量方法，任何准确的测量仪器，均不可能使测量误差等于零。换言之，任何测量必然产生误差，不含误差的测量结果是不存在的。测量实践证实了误差的普遍性和必然性，下述的误差公理已被人们公认不疑。

误差公理：测量结果都具有误差，误差自始至终存在于一切科学实验和测量的过程之中。

三、研究误差理论的意义

1. 确定测量误差是整个测量过程不可缺少的重要环节

对于不知其测量误差的测量结果，往往是无法应用从而也是无意义的。例如在机械加工中，对于与某个孔相配合的轴，其直径不能过大或过小，否则达不到轴孔配合的要求。假设轴的客观实际直径 X_0 在 9.99～10.01mm 范围内才是合格的，否则不符合要求。现知道某根轴直径的测量结果为10mm，但不知其测量误差，那么这根轴是否一定符合要求呢？为此作如下分析。

当轴直径测量误差的绝对值，即测量结果(10mm)与轴的客观实际直径

X_0 的差值的绝对值不超过 0.01mm 时，此时轴的客观实际直径 X_0 在 9.99～10.01mm 范围内，因此是合格的。

当轴直径测量误差的绝对值超过 0.01mm 时，此时轴的客观实际直径 X_0 超出 9.99～10.01mm 范围，因此不合格。

由此可见，测量结果为 10mm 的这根轴，在不知其测量误差时，是无法判断其合格与否的。事实上，它可能是合格的，也可能是不合格的，这取决于测量误差的大小。因此，对实验和测量数据进行科学分析，合理进行测量误差及测量不确定度的估计，确定其大小是误差理论研究的第一个内容。

2. 误差理论是保证和提高测量准确性的必要的理论依据

在生产中，大量的测量工作是为了检验各种被测对象是否符合要求，即是否为合格品。这就要求检验手段，即所用的测量仪器和测量方法需达到一定的准确性。如误差过大就很可能将不符合标准要求的被测对象，被误认为合格品而验收，或者将合格的被测对象被当作不合格品而拒绝验收。

在科学研究中，经常要求测量尽可能地减小误差，并且将测量误差大小作为衡量研究成果的一项重要指标。特别在计量科学领域里，计量科技水平高低的主要指标是测量误差的大小，即测量准确度的高低。

因此，在很多时候，要求我们设法减小测量误差，提高测量准确度。这就需要对误差的产生原因、误差的类型及特性进行全面的、系统的分析与研究，从而找出减弱或消除测量误差对测量结果影响的方法与准则。这些方面也正是误差理论所包含的内容。

尽管测量误差不能完全消除，但设法减小测量误差对测量结果的影响、提高测量的准确度是可行的。

3. 误差理论是合理选用、设计仪器的必要理论依据

我们知道，对一个被测对象的测量，往往可以选用不同的测量仪器。测量长度可用各种量规，也可用卡尺、千分尺，还可用测长仪等各种精密仪器。测量温度可用普通水银温度计，也可用精密水银温度计，还可用高准确度的贝克曼提度计。而这些计量器具的准确性各不相同，所获得的测量结果的误差也各不相同。一般情况是测量的准确度越高，测量过程就越复杂，对仪器和测量环境越苛求，对测量人员的技术要求也越高，从而耗资、耗时也越多。因此，很多测量工作，特别在生产中大量的测量检验，并不盲目追求高准确度，而是在满足测量准确度的前提下，求得测量工作测便、经济，有较高的速度以适应生产的要求，这就需要应用误差理论科学地、合理地选择测量器具。

在设计仪器时，鉴于加工等原因，有时应用近似原理，如以线性运动近

似地代替非线性运动，从而产生仪器原理设计误差。此外，在仪器零部件的加工、装配和调试中，由于不可能达到完全理想的位置或状态，也必然产生加工、装配和调整误差，这些误差都影响仪器的测量准确性。设计中需应用误差理论来分析并适当控制这些误差因素，使仪器的测量准确度达到设计要求。总之，误差理论已成为从事测量技术和仪器设计制造科技工作者必不可少的理论知识，它也同任何其他科学理论一样，将随着生产和科学技术的发展而进一步得到发展和完善。

4. 合理进行测量不确定度的评定与表示是现代科技交流和国际贸易的迫切需要

随着人类社会的飞速发展，在市场竞争激烈、经济全球化的今天，科技交流和国际贸易日益频繁，统一测量不确定度的评定与表示方法，使各国进行的测量及得到的结果可以进行相互比对，取得相互承认或共识，已经受到了国际组织和各国计量部门的高度重视。显然我国要取得国际经济和市场竞争的优势地位就必须在各方面与国际接轨。例如，在质量管理体系认证、产品质量认证、实验室认可、计量认证、出具检定证书、校准证书、检测报告、鉴定报告以及撰写学术报告、技术规范、产品标准甚至签定合同、协议等文件时，其有关测量结果和测量不确定度的报告，都应具有与国际一致的评定和表示方法。

随着科学技术的发展，误差理论与测量不确定度的评定在理论上和实际应用上都得到了极大的发展，已成为国内外引人注目的学科，不仅在高等学校有关专业开设此课程，而且从事各种实验和研究的科技工作者也学习和研究它，特别是从事计量科学、产品质量检验、质量管理和精密测试等的人员，《误差理论与测量不确定度评定》更是一门必不可少的、十分重要的基础课。

第1章 误差的基本概念

第一节　测量误差术语与概念

在国民经济、国防建设、科学研究和社会活动中，人们每天都在进行大量的测量。测量在司法执法、商业贸易、维护权益、保护资源环境、医疗卫生等方面起着越来越大的作用。测量的目的是为了得到准确可靠的测量结果，测量是研究误差理论与测量不确定度的前提。

一、量和计量单位

1. 量

量定义为现象、物体或物质可定性区别和定量确定的属性。

自然界中任何现象、物体或物质都具有一定的形式，所有形式都要通过量来表征。量是表征自然界运动规律的基本概念。量是计量学要研究的对象。定性区别是指在特性上的差别，如几何量、电学量、热学量、力学量等，特性不同的量，它们之间不能相互比较。特性相同的量组合在一起称为同类量，例如功、热能可用同一个单位焦耳表示；厚度、周长、波长可用长度单位米表示。定量确定是指具体的量，又称特定量，如确定某一工件的长度，某根导线的电阻等。它们之间可以相互比较，如工件的长短、导线电阻的大小，故又称同种量。

量又可分为基本量和导出量。基本量是指在给定量制中约定地认为在函数关系上彼此独立的量，例如在国际单位制所考虑的量制中，长度、质量、时间、热力学温度、电流、物质的量和发光强度为基本量。导出量是指在给定量制中由基本量的函数所定义的量，例如速度是导出量，定义为长度除以时间。

量又可分为可数量和可测量。可数量意指仅仅用于确定被计数对象数目多少的量，只需要通过计数的办法就能获得。例如，5支铅笔，10辆汽车，50个人等。可数量理论上不存在误差，不属于计量学研究的内容。可测量是指只能通过计量器具测量方可得到量值的量，可测量不可数，测量结果肯定存在误差。它可由数值和计量单位的组合表示其大小。没有计量单位的纯数值一般不能表示量。当然有些可测量表面上没有测量单位，如相对密度，折射系数等，但它们是以具有相同测量单位的量作为单位、并取其比值。

2. 计量单位

计量单位是指为定量表示同种量的大小而约定地定义和采用的特定量，简称单位。计量单位是定量描述自然界所有量的量值的基础和依据。

计量单位是一个人为约定选取的特定量，它具有专门的名称、符号、确定的定义、数值1、且能复现。例如长度计量单位米，符号m，定义是光在真空中于(1/299 792 458)s时间间隔内所经路径的长度。

计量单位同时具有科学上的严密性、合理性、先进性和公认性、随着科学技术的发展而变化。我国目前实行的法定计量单位是以国际单位制为基础，加之我国特选的17个非国际单位制单位构成。其中7个SI基本单位(见表1-1)是彼此独立并有严格定义的，也是国际单位制的基础与核心，其他单位都是由这7个SI基本单位导出来的。

表1-1 SI基本单位

量的名称	单位名称	单位符号
长度	米	m
质量	千克(公斤)	kg
时间	秒	s
电流	安[培]	A
热力学温度	开[尔文]	K
物质的量	摩[尔]	mol
发光强度	坎[德拉]	cd

注：①圆括号( )中的名称，是其前的名称的同义词；

②方括号[ ]内的字，在不致混淆的情况下，可以省略。

计量单位还具有统一性和法制性，在实际测量中应严格执行我国法定计量单位使用方法。

3. 量值

量值定义为一般由一个数乘以计量单位所表示的特定量的大小。

量值是量的定量表示形式。一般说来，任何可测量都必须由数值和计量单位组合而成，如5.12m，10s，100kg，40℃等。这里要特别注意区别数值和量值。数值是指在量值表示中与单位相乘的数，如上例中5.12，10，100，40是数值，但不包含计量单位，数值非量值。

二、测量与计量

1. 测量

测量定义为以确定量值为目的的一组操作。

测量的目的是确定被测量的值或获取测量结果。测量是一个过程，具体说，也就是将被测量与已知的标准量（计量器具的示值）相比较的过程。任何一个测量过程都包含五个要素：测量设备、测量方法、测量环境、测量人员和被测对象。被测量确定之后，合理设计测量方法、合理选择测量设备、确定测量环境和测量人员，以及严格按照设计的测量程序完成全部操作，是决定测量质量高低的重要因素。

测量结果是由测量所得到的值。在给出测量结果时，应表明它是示值、未修正测量结果或是已修正测量结果，还应表明它是否是几个值的平均值，亦即它是由单次测量所得，还是由多次测量所得。测量结果仅仅是被测量的最佳估计值，并非真值，完整表述测量结果时，必须附带其测量不确定度。必要时，还应说明测量所处的条件或影响量的取值范围。

2. 计量

计量定义为实现单位统一、量值准确可靠的活动。

计量属于测量的范畴。定义中的单位统一指的是计量单位的统一。计量单位的统一，是量值统一的重要前提。量值准确可靠表征的是测量结果与被测量量的真值的接近程度，“准”的定量描述用误差或测量不确定度。“准”是计量的核心。计量结果不仅仅应明确给出被计量量的量值，而且必须同时给出该量值的误差范围或不确定度。严格地说只有量值大小，而无准确程度（或测量不确定度）的结果，不是计量结果。其量值也不具备明确的社会实用价值。

计量学研究的基本内容如下：

①计量单位与单位制。

②复现计量单位的基准计量器具，标准计量器具的建立、复制与保存，以及普通计量器具。

计量器具按技术性能、准确度高低及用途可分为国家主基准、国家副基准、工作基准、标准计量器具（分一等、二等……若干等级）和普通计量器

具。基、标准计量器具用于量值传递标准器，普通计量器具仅用于现场测量。

③量值传递与溯源。

量值传递是指将国家计量基准所复现的单位量值，通过各级计量标准传通到工作计量器具以保证被测对象量值的准确和一致。溯源是指通过一条具有规定不确定度的不间断比较链，使测量结果或计量标准的值能够与规定的参考标准，通常是与国家测量标准或国际测量标准联系起来。

④误差理论与测量不确定度。

“准”是计量的核心，误差与测量不确定度是“准”的定量描述指标，也是评价测量质量的惟一指标。

⑤物质、物理常数和材料与物质特性的测定。

⑥计量管理。

3. 测量与计量间的关系

测量是一个广义的概念，而计量也是以确定被测量量值为目的的一种活动，测量包含计量。同时计量又是一种特殊的测量，计量是以实现单位统一为前提条件以量值准确可靠为核心的测量。鉴于计量的各个要素均有特殊的要求：用于计量的计量仪器必须经过计量技术机构的计量检定，且有有效期内的计量检定合格证书；计量人员必须持有相应计量项目的计量检定员证书或计量员职业资格证书；计量环境必须满足相应计量技术规范规定的要求；计量方法、程序步骤和计量结果的处理必须严格遵照相应计量技术规范的规定进行；计量结果不仅仅要给出被测量的量值大小，同时必须给出其测量不确定度。计量是测量的基础，同时又是最高层次的测量。

接计量的性质不同，可将测量分为计量检定和校准。

计量器具的检定是查明和确认计量器具是否符合法定要求的程序，它包括检查、加标记和出具检定证书。又简称计量检定。

计量检定的对象是计量器具，在我国主要是由各级政府计量院所以及授权的实验室来完成。计量检定的实质内容是对计量器具的计量性能是否满足计量检定规程的要求给出符合性判断，即给出合格还是不合格的结论，而这个结论具有法律效力。

计量检定必须按照国家计量检定系统表(或国家溯源等级图)进行，计量检定必须执行计量检定规程。

计量检定是我国开展量值传递与溯源最常用的方法，对于保证计量单位统一和量值准确可靠的测量起着关键性作用。

校准是指在规定条件下，为了确定测量仪器或测量系统所指示的量值，或实物量具或参考物质所代表的量值，与对应的标准所复现的量值之间关

系的一组操作。

校准的对象主要是计量器具的示值误差。校准是由组织内部或委托其他组织(不一定是法定计量组织),依据可利用的公开出版的技术规范,组织编写的程序或制造厂的技术文件,确定计量器具和测量设备的示值误差,以确定是否符合预期使用要求。校准结果既可给出被测量的示值,又可确定示值的修正值。校准还可确定计量器具的其他计量特性,如影响量的作用等。校准结果可记录在校准证书和校准报告中。

三、测量方法的分类

测量方法可按不同分类方式分为诸多类型,这里仅介绍最常用的分类。

(1) 按测量值获得方法不同,可将测量分为直接测量、间接测量和组合测量。

无需对被测的量与其他量进行函数关系的辅助计算,而直接得到被测量值的测量称为直接测量。

直接测量的数学模型可简化为$Y=X$,被测量的值可以由计量器具直接测得,无需进行任何其他辅助计算或换算。如用千分尺测量圆柱直径,用血压计测量人体血压,用温度计测量室温等均属直接测量。

间接测量是依据直接测量的量与被测量之间的已知函数关系,通过计算得到被测量量值的测量。

间接测量的数学模型为

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{1-1}$$

式中: Y——间接测量值;

$X_1, X_2 \cdots, X_n$——各直接测量值。

间接测量值是通过直接测量的量值和函数关系式计算得到。如矩形面积的测量,S是被测量,通常无法用计量器具直接测得,而是先直接测量与S有关的的矩形长度a和宽度b。再由公式$S=a\times b$计算得到S值。S则是一间接测量结果。

组合测量是指直接测量各被测量的组合量,将组合量的测得值和对应的组合量一一列出方程,然后通过解测量方程组得到各被测量的量值。组合测量既可提高测量的准确度,又可减少测量的工作量,常用于精密测试和计量检定之中(详见第7章相关内容)。

(2) 根据测量条件的不同,可将测量分为等精度测量和不等精度测量。

等精度测量是指在参与测量的五个要素即测量仪器、测量人员、测量方法、测量环境和被测量均不发生改变的条件下的多次重复测量。等精密测量又称为重复性测量。

多次重复测量过程中，测量的五个要素保持绝对不变是不可能的，所以说等精度测量是一个理想的概念。对某一固定被测量作等精度测量时，所得测量数据允许有一定范围的大小变化，但对偏大或偏小的数值，不能判定哪个数值更加接近被测量的真实值，只能取一视同仁的态度，同等对待，即对测得的数据的可信程度是相同的。

不等精度测量是指参与测量的五个要素除被测对象不能改变外，其他四个因素全部或任何一个因素发生改变所进行的测量。不等精度测量又可称为复现性测量。

在测量过程中，由于改变测量条件，如由不同的观测者、用不同仪器、不同方法、在不同环境条件下对被测量进行不同次数的测量，使影响和决定测量误差大小的因素各异，对测得的数据的可信程度不相同。不等精度测量常用于高准确度的测量问题。

第二节 误差的定义及基本概念

一、误差的定义

测量误差系指测量结果减去被测量的真值，简称误差。用数学表达式表示如下：

$$\delta = x - a \qquad (1\text{-}2)$$

式中：δ——测量结果 x 的测量误差；

x——被测量的测量结果；

a——被测量的真值。

(一) 测量结果

测量结果 x 的值是由测量所得到的赋予被测量的值。

测量结果 x 的值可由计量器具直接测得，也可以通过对测得值借助已知的函数关系式计算得到。测量结果这一术语是一个一般的概念。广义上我们可以把测得值、测量值、检测值、实验值、示值、名义值、标称值、预置值、给出值等均看作是测量结果。测量结果是我们要研究的对象。

测量结果又分为单次测量结果和平均测量结果。单次测量结果是指对被测量每一次测量所得到的测量结果，用于测量过程的详细描述。平均测量结果系指对被测量多次测量，其若干个单次测量结果的平均值。平均测量结果通常用于被测量最后测量结果的描述。在给出测量结果时应说明它是单次测量结果，还是平均测量结果。

测量结果仅是被测量之值的估计。在测量结果的完整表述中还应包括测量不确定度，必要时还应说明有关影响量的取值范围。

（二）真值

真值定义为与给定的特定量的定义一致的值。

所有的被测量在特定的条件下，理论上都有一个对应的客观、实际值存在，我们称之为"理论真值"。之所以称为"理论真值"是因为对被测量量值的定义条件实际上都是理想中的，量的真值只有通过完善的测量才有可能获得。而我们在测量时不能够绝对按这个定义进行，也就是说真值只是个理想的概念，这在误差理论研究中非常重要。

1. 真值的特性

（1）近似可知性

测量的目的在于确定被测量的真值。但是由于参与测量的所有要素都不能做到完美无缺，使得测量存在误差，其测量结果只能是真值的近似值。所以在一般情况下，真值是不可知的。只在少数特殊情况下，我们能知道被测量的真值。例如，平面三角形的三个内角之和的理论真值是180°，一个平面圆的圆心角的理论真值为360°。此外按国际计量大会关于量的单位的决议所能复现的量值可以认为是真值。如保存在国际计量局的国际千克原器基准砝码的真值为1kg。

（2）可变性

与任何事物一样，被测量处在不断变化中，致使真值随着时间、地点和环境的变化而变化。

真值在某些因素影响下，会发生较大、较快的变化。例如金属制件受温度的影响，其外形尺寸呈现"热胀冷缩"的变化规律，一米长的量块，温度变化1℃，则长度（即真值）的变化量约为0.011mm。

有些因素对真值的影响则是缓慢的，只有相当长的时间以后，才有比较明显的变化。像材料老化引起真值的变化就属于这种情况。因此，对于计量器具，在相隔一定的时间以后，对它们的量值需要重新确定。

2. 真值的类型

（1）理论真值

理论真值是满足真值理论定义的真值。

绝大多数的理论真值按其本性是不确定的，极个别被测量的理论真值是可定量描述的。例如，平面三角形的三个内角之和的理论真值为180°，平面直角理论真值为90°。

(2) 约定真值

由于真值按其本性是不确定的，为了定量描述自然界中量的真值，科学上只能采用人为约定的真值。约定真值定义为对于给定目的具有适当不确定度的、赋予特定量的值，有时该值是约定采用的。

约定真值应是理论真值的最佳估计值，就给定的目的而言，约定真值的不确定度(或误差)可忽略不计。该真值的类型有以下三种：

①指定值　由国际计量局(BIPM)和国际计量委员会(CIPM)等国际标准化和计量权威组织定义、推荐和指定的量值。例如，7个SI基本单位(长度单位米、质量单位千克、时间单位秒、电流单位安培、热力学温度开尔文、发光强度单位坎德拉和物质的量单位摩尔)是国际计量局指定选取的7个基本量的值。又如国际温标ITS-90中所给出的固定点等。

②约定值　在量值传递中通常约定高一等计量标准器具的不确定度(误差)与低一等计量器具的不确定度(误差)之比小于等于1/2或1/3时，则称高一等计量器具的量值相对于低一等计量器具的量值为约定真值。在计量检定中高一等标准器具的不确定度可忽略不计。从而建立起计量检定体系。又如现在光在真空中的传播速度约定为299 792 458m/s，把水三相点热力学温度约定为273.16K等。

③最佳估计值　通常将一被测量在重复条件或复现条件下的多次测量结果的平均值作为最佳估计值并作为约定真值。即以算术平均值作为最后测量结果的表达值均可看作是约定真值。如常数委员会(CODATA)所公布的物理常量的值。

【例1-1】　用测角仪测得平面三角形的三个角分别为 $\alpha_1=78°00'18''$、$\alpha_2=36°00'15''$、$\alpha_3=75°59'43''$。由式(1-2)得三个内角和的误差为

$$\begin{aligned}\delta_\alpha &=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-180° \\ &=180°00'16''-180° \\ &=16''\end{aligned}$$

【例1-2】　一个标称值为5g的二等标准砝码，用一个标称值同为5g的一等标准砝码(满足相对真值条件)，在相应不确定度的天平上进行计量检定，测得二等标准砝码的实际值为4.998g，则该砝码的误差为

$$\delta_m=5\text{g}-4.998\text{g}=0.002\text{g}$$

二、测量误差的基本表示方法

测量误差的最基本表示方法分为绝对误差、相对误差和引用误差三种。

1. 绝对误差

绝对误差的定义与测量误差的定义相同，即

$$绝对误差 = 测量结果 - 真值 \tag{1-3}$$

绝对误差具有确定的大小、计量单位和"+""-"号。适用于同一量级的同种量的测量结果的误差比较和单次测量结果的误差计算。

【例 1-3】 某机加工车间加工一批直径为 50mm 的轴，抽检两根轴的直径测量结果分别为 49.9mm 和 49.8mm，两根轴的绝对误差分别为

$$\delta_1 = 49.9\text{mm} - 50\text{mm} = -0.1\text{mm}$$

$$\delta_2 = 49.8\text{mm} - 50\text{mm} = -0.2\text{mm}$$

显然第一根轴的绝对误差比第二根轴的绝对误差小，也就是说第一根轴的加工准确度高。

【例 1-4】 对某量在同一条件下多次重复测量，得测量数据如下：

100.01g　100.00g　100.02g　100.03g　100.02g

假定被测量的真值为 100.00g，则各单次测量结果的误差分别为

$$\delta_1 = 100.01\text{g} - 100.00\text{g} = 0.01\text{g}$$

$$\delta_2 = 100.00\text{g} - 100.00\text{g} = 0.00\text{g}$$

$$\delta_3 = 100.02\text{g} - 100.00\text{g} = 0.02\text{g}$$

$$\delta_4 = 100.03\text{g} - 100.00\text{g} = 0.03\text{g}$$

$$\delta_5 = 100.02\text{g} - 100.00\text{g} = 0.02\text{g}$$

由绝对误差的定义还可引出一个修正值的概念：

$$修正值 = -绝对误差$$

把修正值用代数方法与未修正测量结果相加，以补偿其系统误差的值，即

$$测量结果 + 修正值 = 真值$$

【例 1-5】 一个 10g 的三等标准砝码，经二等标准砝码计量检定得到误差为 -0.002g，则该砝码的修正值就是 +0.002g，实际值(真值)为

$$10\text{g} + 0.002\text{g} = 10.002\text{g}$$

这里必须特别指出，由于理论真值具有不可知性，约定真值仅是理论真值的近似值，故得到的误差仅是一个近似误差，其修正值也带有误差。经过修正值修正以后的测量结果，也只能是一个更接近理论真值的近似真值。

2. 相对误差

由于绝对误差用于不同量级的同种量误差间的比较发生困难，如用一长度计量器具测量真值分别为 100cm 和 10cm 的两个物体长度值，测量结果分别为

物体 1　测得值 100.1cm　其绝对误差为 0.1cm

物体 2　测得值 10.1cm　其绝对误差为 0.1cm

两物体的绝对误差均为0.1cm，但显然物体1的测量准确度更高些，为此引入相对误差。

$$相对误差=\frac{绝对误差}{真值}=\frac{绝对误差}{约定真值}$$

$$\gamma=\frac{\delta}{a} \tag{1-4}$$

相对误差具有确定的大小和正负号，但无计量单位，通常用百分形式表示。

用相对误差可比较上述两物体长度的测量误差：

$$\gamma_1=\frac{0.1}{100}=0.001=0.1\%$$

$$\gamma_2=\frac{0.1}{10}=0.01=1\%$$

为了计算方便，在有些测量领域规定使用如下相对误差估计公式：

$$相对误差=\frac{绝对误差}{测量结果}$$

$$\gamma=\frac{\delta}{x} \tag{1-5}$$

在电学计量的误差评估时就多使用该公式。

【例1-6】 用一电压表分别对A、B两电压进行测量，测量结果如下：

$$x_A=100.0\text{V} \qquad \delta_A=1.0\text{V}$$

$$x_B=5.0\text{V} \qquad \delta_B=0.2\text{V}$$

试比较两电压测量结果准确度的高低。

解： A、B两电压测量结果的相对误差分别为

$$\gamma_A=\frac{\delta_A}{x_A}=\frac{1.0}{100.0}=1\%$$

$$\gamma_B=\frac{\delta_B}{x_B}=\frac{0.2}{5.0}=4\%$$

$\gamma_A<\gamma_B$，即A电压的测量结果准确度高于B电压测量结果的准确度。

3. 引用误差

绝对误差和相对误差通常用于单值点测量误差的表示，而对于具有连续刻度和多挡量程的测量仪器的误差则用引用误差表示。

引用误差定义为测量仪器的误差除以仪器的特定值，即

$$引用误差=\frac{示值误差}{特定值} \tag{1-6}$$

或

$$\text{引用误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{特定值}} \tag{1-7}$$

定义中的示值误差是用测量仪器各示值点上的绝对误差来表示，通常取绝对值最大者。

特定值又称引用值，可以是测量仪器的量程或标称范围的上限。量程是指测量仪器标称范围上限值与下限值之差的模。例如某压力表标称范围为－0.1MPa～＋0.1MPa，则量程为0.2MPa。

由式(1-6)中的示值误差取值各示值点上误差绝对值最大者，可以说引用误差实际上是一个"±"值。引用误差实质上是简化了的相对误差，用百分比表示。引用误差去掉"±"号、"%"号后为测量仪器的准确度等级的计算值。

国家标准和国家计量技术规范将某些专业的仪器仪表，按引用误差的大小分为若干准确度等级。例如，电压表和电流表的等级分为0.05，0.1，0.2，0.3，0.5，1.0，1.5，2.0，2.5，5.0等11个等级。符合某一个等级S仪表，说明该仪表在整个测量范围内，各示值点的引用误差均不超过S%，同时也只有在仪表整个测量范围内，各示值点的引用误差不超过S%时，才能确定该仪表符合S级。

【例1-7】 一块0.5级测量范围为0～150V的电压表，经更高等级标准电压表校准，在示值为100.0V时，测得实际电压(相对真值)为99.4V，问该电压表是否合格？

解： 示值为100.0V时的绝对误差为

$$\delta = 100.0\text{V} - 99.4\text{V} = 0.6\text{V}$$

该电压表的引用误差为

$$\text{引用误差} = \frac{0.6}{150-0} = 0.4\%$$

0.5级电压表允许的引用误差为0.5%，因0.4%<0.5%，所以该电压表合格。

【例1-8】 有一块测量范围为－0.1MPa～＋0.1MPa，2.5级的压力真空表，在进行计量校准时，各示值点上最大允许误差是多少？

解： 该压力真空表在－0.1MPa～＋0.1MPa范围内各示值点上的引用误差不应超过2.5%，则各示值点上允许误差的最大示值误差应为

$$\delta \leqslant 2.5\% \times [0.1-(-0.1)] = 0.005(\text{MPa})$$

引用误差专用于仪器仪表误差的描述。

4. 分贝误差

在无线电、声学等计量中常用分贝误差来表示相对误差。

设电压值 U_1 和 U_2 的比值为 a，即 $a=U_1/U_2$，则称

$$A = 20\lg\frac{U_1}{U_2} = 20\lg a \tag{1-8}$$

为电压比的分贝，记作 dB。

由式(1-8)可知，若比值 a 有误差 δ_a，则导致分贝 A 产生分贝误差 δ_A。它们有下列关系：

$$\delta_A = 20\lg\left(1+\frac{\delta_a}{a}\right) \approx 8.69\frac{\delta_a}{a}\ (\mathrm{dB}) \tag{1-9}$$

由上式可知，分贝误差是一种特殊形式的相对误差，且它与绝对误差 δ_a 的符号相同。

【例 1-9】 某电压表测得电压为 217V，用标准表测量该电压为 220V，求电压表测量的绝对误差、相对误差和分贝误差。

解： 绝对误差 $\delta_U = 217-220=-3(\mathrm{V})$

相对误差 $\dfrac{\delta_U}{U_0'} = \dfrac{-3}{220} = -1.4\%$

分贝误差 $\delta_A = 8.69\times(-1.4\%) = -0.12(\mathrm{dB})$

【例 1-10】 某单级放大器电压增益的相对真值 $U_0'=100\mathrm{mV}$，某次测量时测得的电压增益 $U=96\mathrm{mV}$，求测量的相对误差和分贝误差。

解： 增益的绝对误差为

$$\delta = U-U_0' = 96-100 = -4\ (\mathrm{mV})$$

相对误差为

$$\frac{\delta}{U_0'} = \frac{-4}{100} = -4\%$$

分贝误差为

$$\begin{aligned}\delta_U &= 20\lg\left(1+\frac{\delta}{U_0'}\right)\\ &= 20\lg(1-4\%)\\ &= -0.354(\mathrm{dB})\end{aligned}$$

第三节 测量误差的来源

研究测量误差必须掌握误差的来源，弄清楚在测量的全过程中，哪些环节、哪些因素会给测量带来误差。

由于被测对象是千差万别的，从而决定了测量仪器和测量方法也是千差万别的。对于某项具体的测量而言，各有其特殊的误差来源。不同的测

量，引起误差的具体原因也不相同。因此，在这里不是研究某项具体测量的具体误差来源，而是从千差万别的测量中，找出误差来源的共性，作为每项具体测量工作分析误差来源的指导原则。

测量误差来源的共性，应从测量的共性中去寻求。对被测量的实际量值的确定，一般可以归纳为两种方法：第一种方法是将被测量与标准器具复现的量值进行比较。这种比较是通过相应的仪器仪表和辅助设备来实现的，即由仪器仪表并使用一定的辅助设备，测得被测量和标准量的差值。设标准器具复现的量值为 l_0，测得被测量和标准量的差值为 Δl，则被测量 l 为

$$l=l_0+\Delta l$$

如图 1-1 所示，一般称这类测量为相对测量。

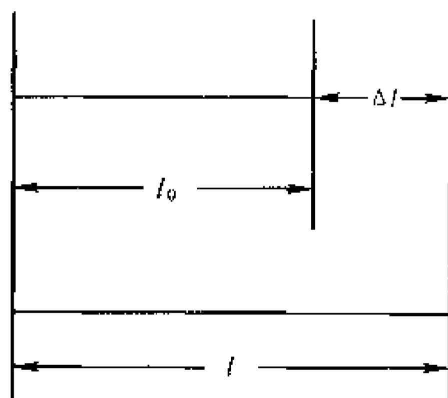


图 1-1

第二种方法。它无需测量被测量和标准量的差值，而是应用必需的辅助设备，由仪器仪表直接测得被测量，一般称为绝对测量。能进行绝对测量的仪器仪表，通常具有较大的测量范围，而且本身常有能复现量值的器具。例如，长度测量中的万能工具显微镜、测长机等，它们均带有复现长度量值的刻线尺，而且这些刻线尺又具备一定的准确性。

由上述两种测量方法，我们可以见到，无论哪类测量，必须具备复现量值单位的标准器具以及相应的仪器仪表(包括必要的辅助设备)。同时，测量工作又必然在某个特定的环境里，由测量人员按照一定的测量方法来完成。因此，测量误差从总体上讲有测量装置(包括标准器具、仪器仪表等)、测量方法、测量环境、测量人员和被测量五个来源。

一、测量装置误差

测量装置是标准器具、仪器仪表和辅助设备的总体。测量装置误差是指由测量装置产生的测量误差。它来源于：标准器具误差、仪器仪表误差、附件误差等。

1. 标准器具误差

标准器具是指用以复现量值的计量器具。如用于长度计量的 He-Ne 激光器、标准量块、标准刻线尺等；用于热工计量的标准水银温度计等；用于力学计量的标准砝码、标准硬度块等；用于电学计量的标准电阻、标准电池等等。它们均以特殊的方式，复现某个计量单位。如 He-Ne 激光器是以激光发出的波长 λ，标准量块是以其两个平面的中心距离，标准刻度尺是以两刻线间的距离来复现长度单位米(或毫米)的。而标准砝码则是以自身所具有的质量来复现质量单位千克(或克)的，等等。

但是，由于加工的限制，标准器复现的量值单位是有误差的。例如，标准刻线米尺的 0 刻线和 1 000 mm 刻线之间的实际长度与 1 000 mm 单位是有差异的。又如，标称值为 1kg 的砝码的实际质量(真值)并不等于 1kg 等等。

为了提高标准器的复现准确度，往往采用更准确的方法进行测量，以获得标准器的修正值。如标准刻线米尺的实际长度为(1 000 + 0.001 5) mm；千克砝码的实际质量为(1 000－0.000 25)g 等等。但是，修正值仍是通过某项测量得到的，因此，仍然含有误差。总之，作为标准器具，复现的量值必然含有误差。此项误差称为标准器误差，它将直接影响被测量的测量结果的准确性。

2. 仪器仪表误差

凡是用于被测量和复现计量单位的标准量进行比较的设备，称为仪器或仪表。它们将被测量转换成可直接观察的指示值。例如，温度计、电流表、压力表、干涉仪、天平，等等。

由于仪器仪表在加工、装配和调试中，不可避免地存在误差，以致仪器仪表的指示值不等于被测量的真值，造成测量误差。例如，天平的两臂不可能加工、调整到绝对相等，称量时，按天平工作原理，天平平衡被认为两边的质量相等。但是，由于天平的不等臂，虽然天平达到平衡，但两边的质量并不等，即造成测量误差。

仪器仪表的准确性，在设计制造时，已进行过理论分析，出厂时进行过检定，并在资料上明确标明示值误差等有关性能指标。显然，仪器仪表误差是在绝对测量被测量或对被测量和标准量的差值作相对测量时，传递给测量结果的。

3. 附件误差

为测量创造必要条件或使测量方便地进行而采用的各种辅助设备或附件，均属测量附件。如电测量中的转换开关及移动测点、电源、热源和连接

导线等均为测量附件，且均产生测量误差。又如，热工计量用的水槽，作为温度测量附件，提供测量水银温度计所需要的温场，由于水槽内各处温度的不均匀，便引起测量误差，等等。

按装置误差具体形成原因，可分为结构性的装置误差、调整性的装置误差和变化性的装量误差。结构性的装置误差如：天平的不等臂，线纹尺刻线不均匀，量块工作面的不平行性，光学零件的光学性能缺陷，等等。这些误差大部分是由于制造工艺不完善和长期使用磨损引起的。调整性的装置误差如投影仪物镜放大倍数调整不准确，水平仪的零位调整不准确，千分尺的零位调整不准确，等等。这些误差是由于仪器仪表在使用时，未调整到理想状态引起的。变化性的装量误差如：激光波长的长期不稳定性，电阻等元器件的老化，晶体振荡器频率的长期漂移，等等。这些误差是由于仪器仪表随时间的不稳定性和随空间位置变化的不均匀性造成的。

二、环境误差

任何测量总是在一定的环境里进行的。环境由多种因素组成，如测量环境的温度、湿度等等。环境误差系指测量中由于各种环境因素造成的测量误差。

被测量在不同的环境中测量，其结果是不同的。这一客观事实说明，环境对测量是有影响的，是测量的误差来源之一。环境造成测量误差的主要原因是测量装置包括标准器具、仪器仪表、测量附件同被测对象随着环境的变化而变化着。例如温度的变化能使测量装置各部分的几何尺寸发生变化，也能引起电子元器件参数的变化，等等。面测量装置和被测量受环境变化的影响，又不是完全一致的。有快有慢，有大有小，以致环境的变化引起了被测量和测量装置之间的相对变化，最终导致测量结果的变化。因面在准确性较高的测量中，对测量环境都提出了具体的要求。我们将规定要求的测量环境，称为测量的标准环境。例如，用绝对光波干涉仪检定一等量块，理论上要求检定的温度为20℃，气压为101 324.72 Pa 、空气湿度(干湿温度计压差)为1 333.22 Pa。仪器的光源在上述标准环境下，发出的波长值是确定的，测量将以这时的波长为标准。当测量环境偏离标准环境，波长将随之发生变化，从面产生测量误差。要保证测量的全过程严格地在标准环境下进行是不可能的。为此，根据测量准确性的要求，提出测量环境允许偏离标准环境的范围，例如，检定100mm二等量块，对温度的要求为：(20±0.5)℃，这个范围是在严格的误差分析基础上提出的。此时，测量环境偏离标准环境而引起的误差是允许的，测量能满足准确度要求。如果测量环境(温度)超出了许可范围，那么环境误差将增大，此时为保证测

量准确性，需采取措施以减小其他误差来源对测量的影响。

测量环境除了偏离标准环境产生测量误差以外，还有各环境因素的微小变化产生的测量误差。在整个测量过程中，环境中的各个因素，如温度、湿度、气压、含尘量、照明度、电磁场强度、大地的微震，等等，均处在不断的变化中。由于各因素变化的程度不一，对测量的影响大小也各不相同。因此，它们对测量的综合影响也不断地发生变化，从而引起测量环境微观变化的测量误差。

环境因素造成的测量误差，有的可以通过理论分析获得。例如，在检定一等量块中，可以通过理论分析，得出测量环境温度升高1℃所产生的测量误差。但是对有些因素，如含尘量、光照、电微场等的微小变化造成的测量误差是无法作出定量分析的，只能通过试验分析方法获得所有环境因素的微小变化对测量的综合影响。

三、方法误差

方法误差系指由于测量方法(包括计算过程)不完善而引起的误差。测量被测对象时，必须在符合要求的环境里，应用适当的测量装置，按照正确的测量方法严格地进行。测量装置是实观测量的物质条件，测量方法则是利用物质条件获得被测量的测量结果的全部过程，包括测量原理和所有的方法步骤。

事实上，不存在不产生测量误差的尽善尽美的测量方法。由测量方法引起的测量误差主要有下列两种情况：

第一种情况：由于测量人员的知识不足或研究不充分以致操作不合理，或对测量方法、测量程序进行错误的简化等引起的方法误差。例如，在万能工具显微镜上测量温柱体的直径必须根据被测直径对光圈进行调整，若测量时疏忽了这一操作或操作不准确，便能引起相当大的测量误差。又如在电学测量中，由于操作不善，引起测量装置的绝缘漏电，以及热电势、引线电阻上的压降等。这些因素往往未在测量结果的表达式中得到反映，以致引起方法误差，等等。

第二种情况：分析处理数据时引起的方法误差。例如，轴的周长可以通过测量轴的直径 d，然后由公式：$L=\pi d$ 计算得到。但是，在计算中只能取其近似值，因此，计算所得的 L 也只能是近似值，从而引起周长 L 的误差。

四、人员误差

人员误差系指测量人员由于生理机能的限制，固有习惯性偏差以及疏

忽等原因造成的测量误差。

目前，自动测量有一定的发展，但毕竟还是少量的，绝大多数的测量需要测量人员用手操作测量装置，用眼观察和估计。例如，用工具显微镜测量圆的直径。图 1-2 是这一测量的示意图。测量时，调整显微镜指标线同圆的两侧直径方向相切。理论上要求指标线调至同圆的影像相切，指标线压住或脱离影像均会产生测量误差。在指标线和影像相切的同时，估计读取指标线在刻度尺的位置 a 和 b，则圆的直径 $d=b-a$。在上述测量过程中，用人眼二次瞄准相切，二次估计读数均受到人眼最小分辨能力的限制。因此，在该测量过程中，有二次对线瞄准误差和二次估读误差。

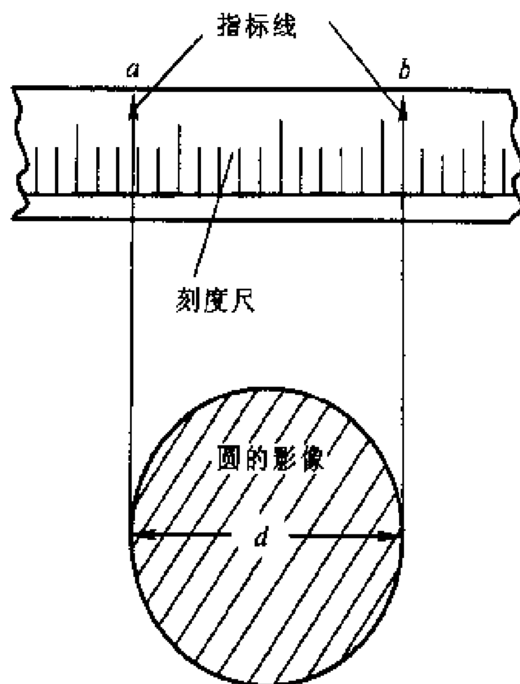


图 1-2

除如上所述测量人员因为人体生理机能限制而产生测量误差以外，还可能因为疏忽造成测量误差。由于测量人员在长时间的测量中，因疲劳或疏忽大意发生看错、读错、听错、记错等错误造成测量误差，这类误差往往相当大是测量所不容许的。为此，要求测量人员养成严格而谨慎的习惯，在测量中认真操作并集中精力，从制度上规定，对某些准确性较高而又重要的测量，由另一名测量人员进行复核测量。

五、测量对象变化误差

被测对象在整个测量过程中处在不断的变化中。由于测量对象自身的变化而引起的测量误差称为测量对象变化误差。

例如，被测光度灯的光度，被测温度计的温度，被测线纹尺的长度，被

测量块的尺寸等，在测量过程中均处于不停地变化中，由于它们的变化，使测量不准而带来误差。下述的测量实例说明了这一点。

在检定刻线尺的 0 至 100 mm 刻线间距时，仪器的显微镜首先瞄准 0 mm刻线，并读取仪器示值 a，然后显微镜移至 100 mm 刻线处读取示值 b，则 $b-a$ 即为 0 至 100 mm 刻线的实际间距。从上述测量过程可见，显微镜在瞄准 0 和 100 mm 两条刻线时，存在时间间隔 Δt_1，而在 Δt_1 时间内，刻线尺受热胀冷缩的影响，尺长必然发生变化。设瞄准 0 mm 刻线时真值为 L_0，瞄准 100 mm 刻线时的真值为 $L_0+\Delta l_1$。由于刻线尺自身变化造成测量误差 Δl_1。如图 1-3 所示。

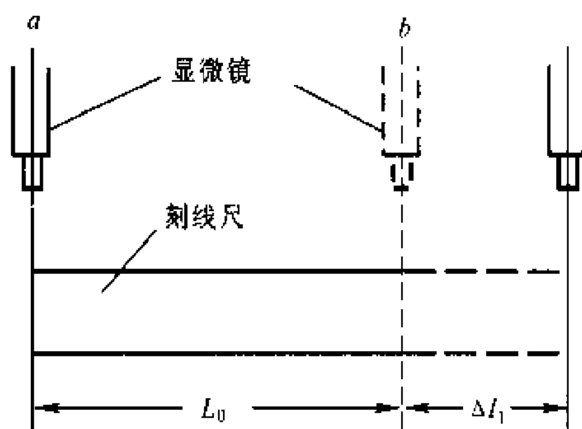


图 1-3

若再次重复测量，瞄准二刻线的时间间隔为 Δt_2。在此期间环境温度可能升高(或降低)，再因操作所用时间不均等原因，一般 $\Delta t_2 \neq \Delta t_1$。因此，测量误差 $\Delta l_2 \neq \Delta l_1$。这样重复多次测量该刻线间距，便会得到数值和符号不尽相同的测量误差列 Δl_1，Δl_2，…，Δl_n。它们的产生以及符号、数值的不同，均是由被测量真值在测量过程中的变化引起的。

通常在各种相对测量中，均有上述真值变化造成测量误差的类似情况，只有在测量过程中，观察被测量时不存在上述时间间隔 Δt，才不会引起测量误差。

综上所述，测量误差有五个来源，即装置误差、环境误差、方法误差、人员误差和被测对象变化误差。从理论上讲，测量自始至终存在误差，整个测量过程的一切环节均产生误差，且所有这些误差均可以归纳为上述五个来源。需要说明的是，这种分类方法不是惟一的，从某种意义上，将人员造成的误差，看成是测量方法引起的，那么误差即可归纳为测量装置误差、环境误差、方法误差和被测对象变化误差四个来源。此外，有时对于某项具体的误差因素而言，可认为属于装置误差，也可认为属于方法误差，等等。因此，在具体分析误差时，重要的不是误差的来源归类，而是要全面分

析误差的各个因素。当然，这里指的“全面”不是一个不漏，实际上对某项测量而言，很难甚至不可能找出所有的误差因素。但是，要求误差分析不遗漏对测量影响较大的那些误差因素。

在我们遇到的众多的测量误差因素中，彼此不是孤立的，它们互相联系地综合影响测量结果。但是，这些因素之间联系的紧密程度是不可能完全一致的。因此，为便于分析，往往将那些与其他因素联系比较弱的单个或一组误差因素作为独立的误差因素项目处理。在分析独立误差项（如温度）对测量的影响程度时，设法保持其他测量条件（包括测量装置、测量方法、测量环境等）的相对稳定。而适当地、有规律地改变独立误差项（如温度的升高和降低），此时测量结果的变化，即反映了该独立误差项（如温度）对测量结果的影响程度。

第四节　误差的分类

在测量中，存在着诸多的测量误差，这些误差均是由不同的因素造成的。由于成因不同，以致误差的特征也不同。研究误差的一个重要内容就是要掌握各种误差所具有的特征，只有这样，才能有正确的误差处理方法。按照误差的特征，可将测量误差分为系统误差、随机误差和粗大误差三类。

一、系统误差

在 JJF1001—1998 中定义系统误差为在重复性条件下，对同一被测量进行无限次测量所得结果的平均值与被测量的真值之差。

按新定义，系统误差是定值的（当然有一定的不确定度），即负的修正值。以下介绍传统的系统误差概念、分类，便于对整个误差理论的理解。

产生系统误差的原因可能是各不相同的，但是它们的共同特点是确定的变化规律，这也使误差的变化具有确定规律性。各系统误差的成因不同，所表现出的规律也不同。按其变化规律系统误差可分为定值系统误差、线性变化的系统误差、周期性变化的系统误差和复杂规律的系统误差。

定值系统误差：系指在一定测量条件下，误差的符号和绝对值保持不变的系统误差。定值系统误差又称恒定系统误差或常差。典型例子是仪器仪表的零点误差，在测量过程中对各点的影响是一个常差。

线性变化的系统误差：系指在测量过程中，误差按线性规律变化的系统误差。典型例子是温度变化对物体长度计量影响而产生的误差为线性变化系统误差。

周期性变化系统误差：系指在测量过程中，误差呈周期性规律变化的

系统误差。典型例子是圆盘式指针仪表，由于指针偏心所造成的误差是按正弦函数规律变化的周期性系统误差。

复杂规律变化的系统误差：系指在测量过程中，误差是按非线性、非周期性的复杂规律变化的系统误差。误差公式是非线性、非周期性函数。

按对系统误差的掌握程度，系统误差又可分为已定系统误差和未定系统误差。

已定系统误差：系指误差的变化规律已经确知的系统误差。如上述的定值系统误差、线性变化系统误差、周期性变化系统误差以及可表示出的复杂规律系统误差均属已定系统误差。

未定系统误差：系指误差的变化规律未确定的系统误差。通常是指那些理论上有规律，但又不能够表现出规律性的复杂规律的系统误差。未定系统误差已包含在测量不确定度内。

二、随机误差

随机误差系指测量结果与在重复条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值之差。

随机误差等于误差减去系统误差。因为测量只能进行有限次数，故可能确定的只是随机误差的估计值。

随机误差的最主要特征是具有随机性，在重复性测量条件下，对同一被测量进行多次重复测量，单次测量的随机误差的绝对值和符号以不可预定的方式变化，没有确定的规律。但像其他随机变量一样，对无限次测量，随机误差服从统计规律。

例如仪器仪表中传动部件的间隙和摩擦、连接件的弹性变形等引起的示值不稳定所产生的误差均为随机误差。

随机误差通常可用测量不确定度来表示。

三、粗大误差

粗大误差系指明显超出规定条件下预期的误差，简称粗差。

粗大误差的主要特征是明显歪曲测量结果。其成因可归结为测量条件的突变和人为因素所致。如测量人员技术水平低下、设计测量方法错误、责任心差而造成的误操作、错误读数、错记录、错计算等导致的测量误差均属粗大误差。

粗大误差属非正常测量误差，含有粗大误差的测量值称为异常值，对确定为含有粗大误差的异常值，应予以剔除。但在确定粗大误差剔除异常值之前，必须经过严格的判别。凡是未经严格判别的任何测量结果均不能

随意剔除。

上述三类误差中，随机误差和系统误差是属于不可避免的正常性误差，而粗大误差则属于能够避免的非正常性误差，是不容许的。因此，在误差数据处理中，对含有粗大误差的测量结果应予以剔除，使得测量结果只含有随机误差和系统误差的影响。

四、误差的相互转化

尽管上面将误差分为系统误差和随机误差和粗大误差三类，但是必须注意各类误差之间在一定条件下是可以相互转化的。对某项具体误差，在此条件下为系统误差，在另一条件下可能表现为随机误差，反之亦然。例如，对一支刻线尺，理论上要求分度值是一个常量，也就是说各刻线间隔应该是均匀的，实际上是不可能的。单就某一刻线间隔而言与理论分度值的差值是确定的，误差性质表现为系统误差。但是若以整支刻线尺为对象，其单一具体刻线间隔误差相对整体刻线误差则表现为随机误差。又如按一定基本尺寸制造的量块，存在着制造误差。对某一具体量块的制造误差是确定数值，可以认为是系统误差，但对一批量块而言，制造误差是变化的，又表现为随机误差。在使用某一量块时，没有检定出该量块的尺寸偏差，而按基本尺寸使用(按级使用)，则误差属于随机误差。若检定出量块的尺寸偏差，按实际尺寸使用(按等使用)，则制造误差属系统误差。同样，在一些情况下，临界粗大误差和随机误差之间也存在类似的相互转化的关系。掌握误差转化的特点，可将系统误差转化为随机误差，用数据统计处理方法减小误差的影响，或将随机误差转化为系统误差，用修正方法减小其影响。

总之，系统误差和随机误差之间并不存在绝对的界限。随着对误差性质认识的深化和测试技术的发展，有可能把过去作为随机误差的某些误差分离出来，作为系统误差处理，或把某系统误差当作随机误差来处理。

第五节 近似数的修约与运算

由于测量误差的存在，所有的测量数据均为近似数，所得到的最终测量结果仅是该真值的近似估计值，自然也是近似数，误差和测量不确定度更是一个近似数。因此，测量数据的处理，从某种意义上说便是近似数的运算。

在测量结果和数据运算中，确定用几位数字来表示测量和数据运算的结果，是一个十分重要的问题。如果认为，不论测量结果的准确度如何，在

一个数据中小数点后面的位数愈多，这个数据愈准；或者在数据运算中，保留的位数愈多，准确度愈高，这种认识是非常片面极端的。对于一个近似数．若将不必要的数字写出来，即浪费时间，又无意义。反之若随意简化近似数的数值也是错误的。一个近似数其近似程度都有一定的限度，在记录测量结果的数据位数或进行数据运算取值多少时，均应以测量所能达到的准确度为依据。因此合理地进行近似数的修约与运算是测量不确定度评定中的重要环节。近似数的修约与运算是研究近似数的截取(又称修约)、有效数字概念和近似的各种运算法则。

一、近似数的修约

1. 修约间隔

修约间隔是确定修约保留位数的一种方式。修约间隔的量值一经确定，修约值即为该量值的整数倍。

修约间隔的量值指定为 10^m(m 可为负整数、零、正整数)形式。当 m 为负整数时，表明将数值修约到 m 位小数，如 $m=-1$ 相当于将数值修约到一位小数；当 $m=0$ 时相当于将数值修约到个位；当 m 为正整数时，表明将数值修约到 10^m 数位，如 $m=2$ 相当于将数值修约到“百”位。

2. 近似数的基本修约规则

由于“四舍五入”修约原则引入的舍入误差较大，不尽合理，更合理的修约原则如下：

(1) 若舍去部分的数值大于保留末位的1/2，则末位加1；

(2) 若舍去部分的数值小于保留末位的1/2，则末位不变；

(3) 若舍去部分的数值恰等于保留末位的1/2，此时，①若末位是偶数，则末位不变；②若末位是奇数，则末位加1。

例如将下列一组近似数，按截取规则保留二位小数。

待修约的数	修约后的近似数
3.130	3.13
3.131	
3.132	
3.133	
3.134	
3.134 95	

$$\left.\begin{array}{l}3.135\\3.136\\3.137\\3.138\\3.139\\3.145\,0\end{array}\right\}\quad 3.14$$

$$3.145\,001\qquad 3.15$$

修约必须一次完成，不能连续修约，如：

1.327 465→1.327 46→1.327 5→1.328

（正确为：1.327 465→1.327）

若数字舍入恰巧发生在合格与否的边界数字上时，则要用(＋)或(－)分别补充表明它们的数值大小。如 1.29→1.3(－)，13.2→1.3(＋)。

误差或不确定度的舍入最好一律采用增大的方式，即只进不舍。后面将提到的有效自由度的计算，则采用截断小数取整的只舍不进的算法。

3. 舍入误差

设 a 为待修约的数，b 为修约后的近似数，则修约的舍入误差应为

$$|\delta|=b-a$$

由近似数的修约规则可见，舍入误差的绝对值不超过近似数末位的半个单位，即

$$|\delta|\leqslant\frac{10^m}{2}\qquad(1\text{-}10)$$

式中，10^m 为修约间隔。

【例 1-11】 $a=3.134\,6$，$m=-2$，则按修约规则(2)得近似数 $b=3.13$，舍入误差的绝对值为

$$\begin{aligned}|\delta|&=|b-a|\\&=|3.13-3.134\,6|\\&=0.004\,6<\frac{10^m}{2}=0.005\\&=0.005\end{aligned}$$

【例 1-12】 $a=3.145\,0$，$m=-2$，则按修约规则(3)之①得近似数 $b=3.14$，舍入误差绝对值

$$\begin{aligned}|\delta|&=|b-a|\\&=|3.14-3.145\,0|\\&=0.005\\&=\frac{10^m}{2}\end{aligned}$$

【例 1-13】 将数 8750 按 100 间隔修约，并求其舍入误差。

按修约规则(3)之②，得：

$$8\ 750 \approx 8\ 800$$

舍入误差为 $8\ 800 - 8\ 750 = 50$

$$|+50| = 100/2$$

4. 0.5 单位修约和 0.2 单位修约

必要时可采用 2×10^m、5×10^m 间隔修约，m 为整数(负整数、零、正整数)，修约规则与 1×10^m 原则是一致的，具体操作时作些变化，方法如下：

将待修约数乘以 C(修约间隔为 2×10^m 时，$C=5$；修约间隔为 5×10^m 时，$C=2$)，按基本修约规则修约，再将修约后的数除以 C，即得修约结果。

【例 1-14】 将下列数按 0.05 间隔修约：

拟修约数值　　　　　　　　　　　　　　末位保留依修约间隔(0.05)

$$20.425 \xrightarrow{\times 2} 40.850 \xrightarrow{\text{按 } 0.05\times2=0.1 \text{ 间隔修约}} 40.8 \xrightarrow{\div 2} 20.40$$

$$20.475 \xrightarrow{\times 2} 40.950 \xrightarrow{\text{按 } 0.05\times2=0.1 \text{ 间隔修约}} 41.0 \xrightarrow{\div 2} 20.50$$

$$20.449 \xrightarrow{\times 2} 40.898 \xrightarrow{\text{按 } 0.05\times2=0.1 \text{ 间隔修约}} 40.9 \xrightarrow{\div 2} 20.45$$

【例 1-15】 将下列数按 0.2 间隔修约：

拟修约数值　　　　　　　　　　　　　　末位保留依修约间隔(0.2)

$$2.12 \xrightarrow{\times 5} 10.6 \xrightarrow{\text{按 } 0.2\times5=1 \text{ 间隔修约}} 11 \xrightarrow{\div 5} 2.2$$

$$1.08 \xrightarrow{\times 5} 5.40 \xrightarrow{\text{按 } 0.2\times5=1 \text{ 间隔修约}} 5 \xrightarrow{\div 5} 1.0$$

对于修约间隔为 2×10^m、5×10^m 还有一些简单的直观修约方法，读者可自己思考，也可参阅专业的计量检定规程。

二、有效数字

有效数字是指经过修约后所得的近似数从左边第一个不是零的数字起到末位上的所有数字。一个近似数有 n 个有效数字，也称这个近似数为 n 位有效数。

例如，近似数 1.414 2，3.141 5，1.732 8 和 110.00 均为五位有效数；而 0.003 86，386 和 3.86 均为三位有效数。

在判断有效数字时，对于零这个数字有三点说明：

(1) 它可能是有效数字，也可能不是有效数字，这取决于它处在近似数中的位置。当零处在第一个有效数字之前时，则零不算有效数字。例如，近似数 0.003 86 前面的三个“0”，均不是有效数字。当零处在第一个有效数字之后，则均为有效数字。例如，近似数 110.00 和 200.030 中的所有“0”

均为有效数字。

(2) 小数点以后的零反映了近似数的误差，不能随意取舍。例如，近似数 100，100.0 和 100.00。这三个近似数在数值上是相等的，但是它们的误差是各不相同的，由舍入误差原理知，这三个近似数的误差绝对值分别不超过 0.5，0.05 和 0.005。

(3) 在第一个有效数字之前的零则与误差无关。例如，近似数 0.003 6 的误差绝对值不超过 0.000 05，而近似数 0.36×10^{-2}的误差绝对值也不超过 $0.005\times10^{-2}=0.000\ 05$。

因此，0.003 6 和 0.36×10^{-2}这两种表示方法是等价的。它们均是两位有效数字，且有相同的舍入误差。

若近似数的右边带有若干零的数字，通常把这个近似数写成 $a\times10^{n}$ 形式。利用这种写法，可从 a 中含有几个有效数字来确定近似数的有效位数，如 2.400×10^{3} 表示四位有效位数；2.40×10^{3} 和 2.4×10^{3}，分别表示三位和两位有效位数。

在测量结果中，最末一位有效数字取到哪一位，是由测量准确度来决定的，即最末一位有效数字应与测量准确度是同一量级的。例如用千分尺测量时，其测量准确度只能达到 0.01mm，若测出长度 $l=20.531$mm，显然小数后第二位数字已不可靠，而第三位数字更不可靠，此时应只保留小数点后第二位数字，即写成 $l=20.53$mm，为四位有效位数。由此可知，测量结果应保留的位数原则是：其最末一位数是不可靠的，而倒数第二位数字应是可靠的。测量误差一般取 1～2 位有效数字，因此上述用千分尺测量结果可表示为 $l=(20.53\pm0.01)$mm。

三、近似数的运算

1. 加减运算

首先分析具有不同误差的两个近似数相加。

例如，求近似数 0.108 2 与 1 648.0 的和。

由舍入误差知，近似数 0.108 2 的误差绝对值不超过 0.000 05，即小数第四位数字“2”有半个单位的误差；而近似数 1 648.0 的误差绝对值不超过 0.05，即处于小数第一位数字“0”有半个单位的误差。当它们相加时，即

$$\begin{array}{r} 0.108\underline{2} \\ +1648.\underline{0} \\ \hline 1648.\underline{1}082 \end{array}$$

由上式可见，加数 1 648.0 的小数第一位数字“0”有误差，所以近似数

的和 1 648.108 2 的小数第一位数字“1”也有误差。因此，要求小数第二位以后数字的准确性便是无意义的了。为此，只须将加数 0.108 2 截取到小数第二位便已满足要求，且简化了计算。

由此，对近似数的加减运算可归纳为：几个(不超过 10 个)近似数相加或相减时，小数位数较多的近似数，只须比小数位数最少的那个数多保留 1 位。在计算结果里，应保留的小数位数与原来小数位数最少的那个近似数相同。

【例 1-16】 求近似数 1 648.0，13.65，0.008 2，1.632，86.82，5.135，316.34，0.545 的和。

解： 因加数中，小数位最少的为 1 位，所以对其余的近似数只须截取到 2 位小数，且它们的和只须保留 1 位小数。即

$$\begin{aligned}&1\,648.0+13.65+0.008\,2+1.632+86.82+5.135+316.34+0.545\\&\approx 1\,648.0+13.65+0.01+1.63+86.82+5.14+316.34+0.54\\&=2\,072.13\\&\approx 2\,072.1\end{aligned}$$

【例 1-17】 求近似数 76.365 1 与 37.4 之差。

解： 因减数只 1 位小数，所以被减数只须保留 2 位小数，且差只须保留 1 位小数。即

$$\begin{aligned}76.365\,1-37.4&\approx 76.37-37.4\\&=38.97\\&\approx 39.0\end{aligned}$$

当 10 个以上的近似数相加时，为减小舍入累积误差，可适当增加加数的小数位数。

2. 乘除运算

首先分析两个近似数相乘。

例如，求 1.364 2×0.002 6 的积。

近似数 1.364 2 有 5 位有效数字，而 0.002 6 有 2 位有效数字。它们均在小数第四位上有半个单位的误差。当它们相乘时，即有下列竖式：

$$\begin{array}{r}1.364\underline{2}\\ \times 0.002\underline{6}\\ \hline \underline{8}\,\underline{1}\,\underline{8}\,\underline{5}\,\underline{2}\\ 2\,7\,2\,8\,\underline{4}\\ \hline 0.003\,\underline{5}\,\underline{4}\,\underline{6}\,\underline{9}\,\underline{2}\end{array}$$

从上式可见，积的第二位有效数字以后的各位数均含有误差。因此，

积只须保留到第二位有效数字，即取积的有效位数同乘数中有效位数较少的那个相同。并且乘数 1.364 2 无须保留 5 位有效数字，只须比 0.002 6 多 1 位，即保留 3 位有效数字即可。其乘式即为

$$
\begin{array}{r}
1.3\underline{6} \\
\times 0.002\underline{6} \\
\hline
\underline{8}\,\underline{1}\,\underline{6} \\
2\,7\,\underline{2} \\
\hline
0.003\underline{5}\,\underline{3}\,\underline{6}
\end{array}
$$

因此，正确的算式应为

$$
\begin{aligned}
1.364\,2\times0.002\,6 &\approx 1.36\times0.002\,6 \\
&=0.003\,536 \\
&\approx 0.003\,5
\end{aligned}
$$

由此，对近似数的乘除运算归纳为：在几个近似数相乘或相除时，有效数字较多的近似数，只须比有效数字最少的那个多保留 1 位，其余均舍去。计算结果应保留的有效数字的位数，与原来近似数里有效数字最少的那个相同。

【例 1-18】 求 0.012 1×1.368 72 的积。

解：

$$
\begin{aligned}
0.012\,1\times1.368\,72 &\approx 0.012\,1\times1.369 \\
&=0.016\,564\,9 \\
&\approx 0.016\,6
\end{aligned}
$$

【例 1-19】 求 1.770 42÷30.3 的商。

解：

$$
\begin{aligned}
1.770\,42\div30.3 &\approx 1.770\div30.3 \\
&\approx 0.058\,4
\end{aligned}
$$

在近似数的乘除运算中，保留的位数是以有效数字计算的。因此，当舍去的多余位数为整数位时，被保留的有效数字必须保持它原来的数位不变。如具有 6 位有效数字的近似数 18 673.8 只须保留其三位有效数字，则按近似数修约规则应为 187×10^2，而不是 187。

【例 1-20】 求 18 673.8 ×0.48 的积。

解：

$$
\begin{aligned}
18\,673.8\times0.48 &\approx 187\times10^2\times0.48 \\
&=89.76\times10^2 \\
&\approx 90\times10^2
\end{aligned}
$$

3. 乘方和开方运算

乘方的实质是乘法，此时两个乘数相等，因此它们的误差相同，无须舍去多余位数。例如，1.52^2 的竖式为

$$\begin{array}{r} 1.5\underline{2} \\ 1.5\underline{2} \\ \hline \underline{3}\,\underline{0}\,\underline{4} \\ 76\underline{0} \\ 15\underline{2} \\ \hline 2.3\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{4} \end{array}$$

可见，乘方结果的有效位数应保留与原近似数的有效位数相同。即

$$1.52^2 = 2.310\,4 \approx 2.31$$

开方时，只一个近似数参与，因此不存在舍去多余位数的问题。另外开方与乘方有下述关系：设$\sqrt{a}=b$，则 $a=b^2$。因此，b^2 和 a 有相同的有效位数，而由乘方的原理知，b^2 和 b 的有效位数相同，所以 a 和其开方根 b 有相同的有效位数。

综上所述，对于近似数的乘方和开方运算可归纳为：在近似数乘方或者开方时，计算结果应保留的有效数字与原来近似数的有效数字的位数相同。

【例 1-21】　求近似数 5.32 的平方

解： $5.32^2 = 28.302\,4 \approx 28.3$

【例 1-22】　求 3.164 3 的开方。

解： $\sqrt{3.164\,3} = 1.778\,847\,941\cdots \approx 1.778\,8$

在实际运算中，一个算式往往包括几种不同的运算，对于中间步骤的运算结果，其有效数字比加减、乘除、乘方和开方的运算规则的规定增加 1 位。此外，在计算 4 个以上近似数的平均值时，其有效位数可增加 1 位。

【例 1-23】　求 $7.432\,86+3.695-6.72=?$

解：

$$\begin{aligned} & 7.432\,86+3.695-6.72 \\ \approx & 7.432\,9+3.695-6.72 \\ = & 11.127\,9-6.72 \\ \approx & 11.128-6.72 \\ = & 4.408 \\ \approx & 4.41 \end{aligned}$$

【例 1-24】　求 $18.400\,8\times 0.003+3.2=?$

解：

$$\begin{aligned} & 18.400\,8\times 0.003+3.2 \\ \approx & 18\times 0.003+3.2 \\ = & 0.054+3.2 \\ \approx & 0.05+3.2 \end{aligned}$$

$$=3.25$$

$$\approx 3.2$$

【例 1-25】 求 5.38，6.30、6.46 和 7.52 这 4 个近似数的平均值。

解：

$$\frac{5.38+6.30+6.46+7.52}{4}$$

$$=\frac{25.66}{4}$$

$$=6.415$$

在上例中，除数 4 是正整数，不含误差。因此，它的有效数字应根据算式的需要而定。在此例中，整数 4 可表示为 4.000，即认为它具有 4 位有效数字，且平均值的有效数字比原近似数多 1 位。这种做法的原理将在以后的叙述中找到根据，即数的平均值能提高准确性。

在运用计算器、计算机等计算工具进行数据处理时，能提高运算的速度，减少出现错误的可能性，此时可适当地多保留有效数字或小数位数。但测量误差和测量不确定度一般只保留 1 至 2 位有效数字，其余按规则舍入。

习题一

1-1 何谓量的真值？它有哪些特点？实际测量中如何确定？

1-2 比较绝对误差、相对误差和引用误差的异同点？

1-3 何谓修正值？含有误差的某一量值经过修正后能否得到真值？为什么？

1-4 解释系统误差、随机误差和粗大误差之间的相互转化关系？

1-5 分析求证近似数截取原则的合理性。

1-6 分析误差来源必须注意的事项有哪些？

1-7 用测角仪测得某矩形的四个角内角和为 360°00′04″，试求测量的绝对误差和相对误差。

1-8 一个标称值为 5g 的砝码，经高一等标准砝码检定，知其误差为 0.1mg，问该砝码的实际质量是多少？

1-9 多级弹道火箭的射程为 12 000km 时，射击偏离预定点不超过 1km。优秀射手能在距离 50m 远处准确地射中直径为 2cm 的靶心，试评述这两种射击的准确度。

1-10 设准确度 $S=0.1$ 级，上限值为 10A 的电流表经过检定后，最大示值误差在 3A 处，为 +8mA，问此表合格否？

1-11 已知：某电压表在测量(10～200)V 范围的电压时，其相对误差为 0.2%。求该电压表分别在测量 180V 和 60 V 时的可能最大的绝对误差？

1-12 将下列各数，按近似数截取原则分别截取到百分位和千分位：

$\sqrt{2}$；$\sqrt{3}$；π；6.378 501；5.623 5；4.510 50；7.510 51；13.500 47；2.149 6；

1.378 51。

1-13　试求：$63.07+5.143\,5+2.125\,0+6.62+0.009\,3=?$

1-14　试求：$d=2\pi R=2\pi\times 3.15=?$

1-15　试求：$\dfrac{2\pi}{0.28}=?$

1-16　试求：$627.86\times 0.005=?$

1-17　试求：$\sqrt{0.08641}=?$

1-18　试求：$0.0355^2=?$

1-19　试求：$\sqrt{\dfrac{1.2^2+1.8^2+1.7^2+1.9^2}{4}}=?$（计算结果取两位有效数字）。

第2章 随机误差的基本特征与处理方法



第一节 概述

一、随机误差产生的原因

随机误差是由众多的、变化微小的因素造成的。这些因素中，有的尚未掌握其影响测量准确的规律；有的是在测量过程中对其难以完全控制的微小变化，而这些微小变化又给测量带来误差。

例如，在长度测量中，一些仪器在测量时与被测量以一定的压力保持接触。由于压力机构(如弹簧)的不稳定性，使仪器加在被测量表面的压力有微小的变化，且这种变化无明显的规律，时大时小，无法预先确定，从面引起随机误差。

又如，用测长机测量1m长的钢杆制件，测量温度的允许范围为(20±2)℃。为此，测量在恒温室内进行，恒温室温度控制能力达到(20±0.5)℃，满足测量要求。但在测量时，恒温室的温度必然处在不断地变化中，围绕平均温度20℃有微小的波动，温度时高时低，变化速度时快时慢。温度的微小变化引起钢杆制件长度和测量仪器示值的微小变化，且它们受温度的影响又不一致，有快慢之别，大小之分。这种影响又无法确定，因此造成随机误差。

再如，测量人员瞄准、估读时，围绕其习惯性偏差的微小的不稳定性均导致随机误差。

这些微小变化的众多因素，对测量准确性的影响均是很微小的，很难说哪个因素的影响更主要、更大些。这些因素在整个测量过程中均处在不断地变化中，且又互相交错的、随机的变化影响着，时面这个面素的影响稍

大些，时而那个因素的影响又稍大些，以预先无法确定其变化的方式综合地影响测量结果，造成测量的随机误差。

二、随机误差特性

在测量实践中我们会发现，对某量用同一台测量仪器、相同的测量程序、同一测量人员，在相同的环境条件下进行多次重复测量时，测得值各不相同，其误差的符号和绝对值以不可预知的方式变化着，究其原因这正是随机误差的第一个特征，随机误差具有随机性。

由于产生测量误差的因素微小，不能够掌握和控制，且随时间、环境条件、状态等因素随时变化。因此影响随机误差的因素只有在测量过程之中充分体现，这是随机误差具有的第二个特征，随机误差产生在测量过程中。

随机误差从表面上看，不可预知和没有规律。其实不然，人们通过实践观察到并且证明了，在相同的条件下，对某量进行大量的多次重复测量，其随机误差呈现出某种确定性规律，即随机误差服从统计规律。因此，随机误差可依据概率论与数理统计理论进行处理，即用特征量标准偏差 σ 来表示。测量次数 n 越大，标准偏差 σ 就越小，亦即随机误差就越小。由此推出随机误差具有的第三个特性，随机误差与测量次数有关，增加测量次数可减小随机误差对测量结果的影响。

综上所述，随机误差的特性可归纳为三个方面：具有随机性、产生在测量过程中、与测量次数有关，重复性条件下增加测量次数可减小随机误差对测量结果的影响。

三、随机误差处理的基本原则

随机误差性质上属随机变量，其处理方法的理论依据是概率论与数理统计。具体参量可用随机变量的数学期望(算术平均值)、方差(标准偏差)和置信概率等三个特征量来描述。

第二节　随机误差的分布

一、正态分布

(一) 随机误差的统计直方图

1. 测量实例

首先分析一个测量实例，如图 2-1 所示。已知摆的周期的(约定)真值

$T=3.01\text{s}$。用秒表对该摆的周期进行 $N=150$ 次测量，并用下列符号表示有关数据：

x_i：表示对摆周期 T 的第 i 种测量结果（$i=1, 2, \cdots, m$）。此处 $m=14$。

n_i：表示在 150 次测量中，第 i 种测量结果 x_i 出现的次数。显然有 $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$。

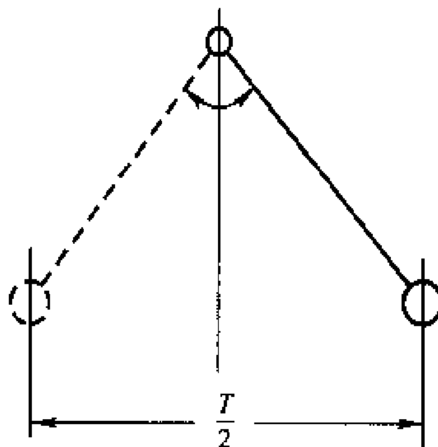


图 2-1

δ_i：表示测量结果 x_i 的随机误差。即有 $\delta_i=x_i-T$。

f_i：表示 x_i 在 150 次测量中出现的可能性。即 $f_i=n_i/N$，并称 f_i 为频率。显然，

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i = 1$$

现将 150 次测量结果和以上各值汇总列于表 2-1 中。

表 2-1　摆周期测量数据

序号	x_i	n_i	δ_i	f_i
1	2.95	4	−0.06	0.026 7
2	2.96	6	−0.05	0.040 0
3	2.97	6	−0.04	0.040 0
4	2.98	11	−0.03	0.073 3
5	2.99	14	−0.02	0.093 3
6	3.00	20	−0.01	0.133 3
7	3.01	24	0.00	0.160 0
8	3.02	17	0.01	0.113 3
9	3.03	12	0.02	0.080 0
10	3.04	12	0.03	0.080 0
11	3.05	10	0.04	0.066 7
12	3.06	8	0.05	0.053 3
13	3.07	4	0.06	0.026 7
14	3.08	2	0.07	0.013 3
$\sum$		150		0.999 9

注：1. 上表中 $\sum_{i=1}^{150} f_i-1=-0.000\,01$，此处不等于零是因为舍入误差引起的。

2. 表中 $\delta_7=0.00$ 也是舍入误差所致，实际测量误差不可能为零。

2. 随机误差统计直方图的绘制

为便于分析研究，首先根据多次测量结果及其有关数据，作统计直方图：即以测量误差 δ 为横坐标，以频率 f 与误差区间 $\Delta\delta$ 的比值 $F=f/\Delta\delta$ 作为纵坐标所作的图形。

仍以摆的周期 T 的测量为例。从表 2-1 可知。150 次测量中的 14 种测量结果 x_i，x_i 出现的次数 n_i，x_i 的绝对误差 δ_i 以及 x_i 的频率 $f_i=n_i/N$。

作图时，取误差区间 $\Delta\delta=0.01$，则根据误差 δ_i 便可划分相应的误差区间以及计算误差在此区间内出现的频率。上述两项数据列于表 2-2，由表 2-2 所列数据，便得图 2-2 所示的摆的周期测量的随机误差统计直方图。

表 2-2

误差区间	$f(\delta)=f_i/\Delta\delta$	误差区间	$f(\delta)=f_i/\Delta\delta$
−0.065～−0.055	0.026 7/0.01≈3	0.005～0.015	0.113 3/0.01≈11
−0.055～−0.045	0.040 0/0.01=4	0.015～0.025	0.080 0/0.01=8
−0.045～−0.035	0.040 0/0.01=4	0.025～0.035	0.080 0/0.01=8
−0.035～−0.025	0.073 3/0.01≈7	0.035～0.045	0.066 7/0.01≈7
−0.025～−0.015	0.093 3/0.01≈9	0.045～0.055	0.053 3/0.01≈5
−0.015～−0.005	0.133 3/0.01≈13	0.055～0.065	0.026 7/0.01≈3
−0.005～0.005	0.160 0/0.01=16	0.065～0.075	0.013 3/0.01≈1

3. 统计直方图的作用

在图 2-2 中，矩形面积：

$$S_i=f(\delta)\cdot\Delta\delta=\frac{f_i}{\Delta\delta}\cdot\Delta\delta=f_i$$

因此，随机误差统计直方图中的矩形面积，表示误差落在误差区间($\delta_i-\Delta\delta/2$，$\delta_i+\Delta\delta/2$)内的频率。当测量次数充分多时，此频率亦即随机误差落在该区间内的概率。因此，此图在一定程度上直观地反映了摆周期测量随机误差的分布情况。假设还在原测量条件下，对摆的周期再作第 151 次测量。那么，虽然我们事先无法确定这次随机误差 δ_{151} 的符号和绝对值，但是由统计直方图可知 δ_{151} 落在不同误差区域内的频率，即可能性。例如，在某种程度上可以断定，误差 δ_{151} 落在区间(−0.000 5，0.000 5)内的可能性为 16%；落在区间(−0.055，−0.045)内的可能性为 4%，等等。而且这种断定随着测量次数的增加，统计直方图显示随机误差在不同误差区间内的频率将更准确，从而为我们提供了揭示随机误差分布规律的一种方法。

(二) 随机误差正态分布的概率密度

随机误差统计直方图提供了随机误差的分布，即随机误差符号和绝对

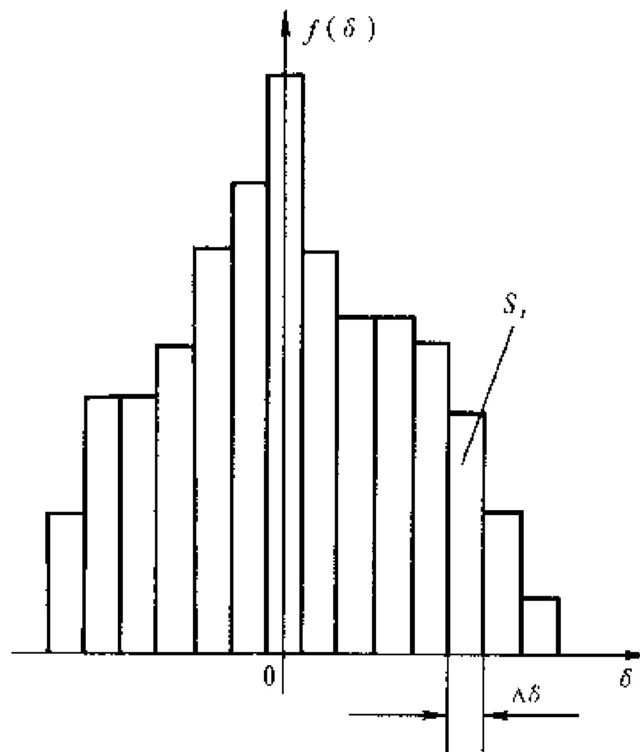


图 2-2

值的分布情况。因为绘制图形时的测量次数是有限的(例如 $N=150$ 次),所以此时提供的分布只是大致的情况。为了准确地反映随机误差的分布,必须进行充分多次的测量,使测量次数 $N\to\infty$,并将误差区间划分得充分小,即使 $\Delta\delta\to0$,此时图 2-2 中各矩形的上边缘形成一条曲线,如图 2-3 所

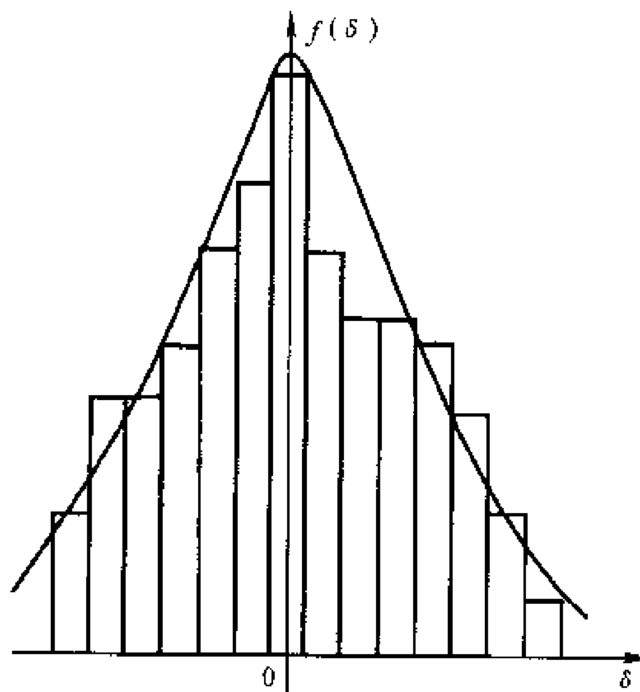


图 2-3

示。这条连续的、对称的曲线称为随机误差的正态分布概率密度曲线(也称高斯分布曲线)。此曲线的函数表达式为

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{2-1}$$

式中：$f(\delta)$——随机误差概率分布密度函数；

e——自然对数之底，e=2.71…；

δ——随机误差；

π——圆周率；

σ——测量的标准偏差。

式(2-1)中，测量的标准偏差σ是评定随机误差的基本指标，它的数值决定于标准器、仪器仪表、测量环境、测量人员和被测对象等各项因素。对同一被测对象，测量系统(包括上述诸因素)确定后，标准偏差σ的数值也随之确定。不同的测量系统(如采用其他标准器和其他仪器仪表；或改变测量环境；或采用其他测量方法等)则σ取值也不同。因此，在测量系统确定后，它的标准偏差也就随之为确定的常数。此时，式(2-1)中唯有随机误差δ一个变量，曲线惟一确定。显然，σ不同，对应的曲线的形状也就不同，图 2-4 分别绘出$\sigma_1=0.5$，$\sigma_2=1$与$\sigma_3=2$时的正态分布概率密度函数$f_1(\delta)$，$f_2(\delta)$与$f_3(\delta)$的图形。由图可见，σ值越小则正态分布曲线越陡，误差的分布趋于集中；σ值越大则曲线$f(\delta)$越平缓，误差的分布趋于分散。

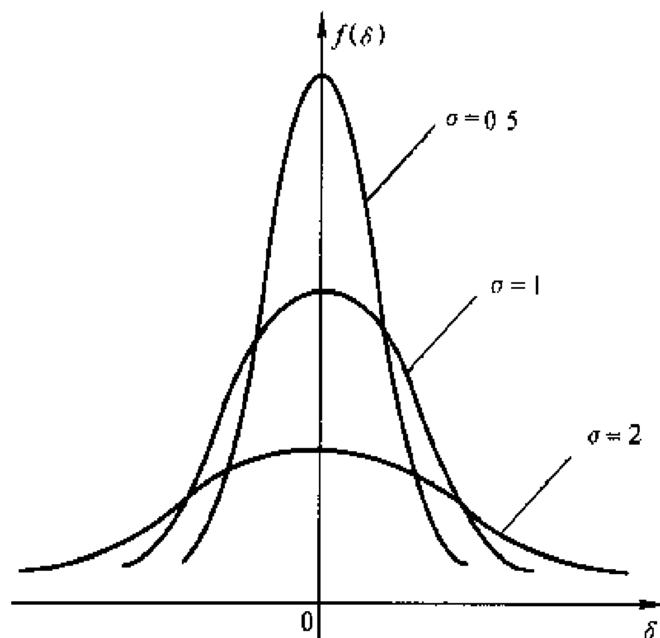


图 2-4

从上面的叙述可知，在统计直方图里，误差落在区间(δ_1,δ_2)内的频率f等于该区间上的矩形面积S。对于正态分布概率密度函数而言此时对应

的面积为正态分布曲线下的面积 p，如图 2-5 阴影部分所示。由前述知频率 f 有下列等式，即

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{N} = 1$$

与此对应，在图 2-5 中有 δ 轴以上和曲线 $f(\delta)$以下的全部面积等于 1。

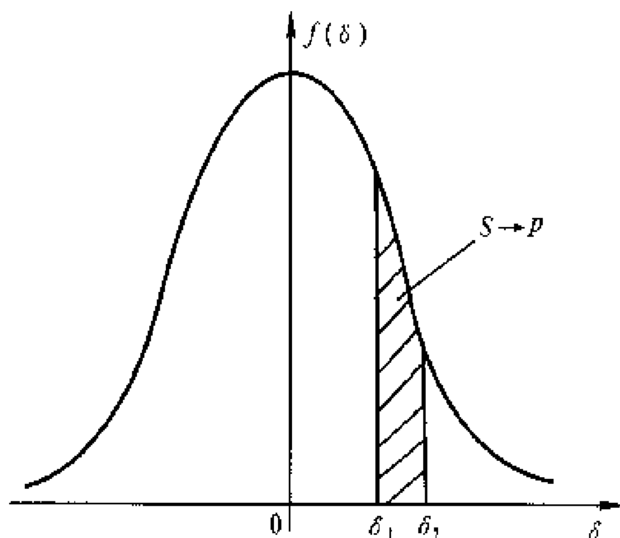


图 2-5

随机误差的正态分布揭示了随机误差取值的具体分布情况，然而，很多时候更关心随机误差的平均值及其分散程度。此即随机误差正态分布的数字特征——数学期望和方差。其中：

数学期望 $E(\delta)=0$

方　　差 $D(\delta)=\sigma^2$

标准偏差 $\sigma=\sqrt{D(\delta)}$

测量实践证明，绝大多数的随机误差均服从正态分布，但也有一些随机误差按其他规律分布，如有的按均匀分布，有的按反正弦分布等。但是，概率论研究成果告诉我们，即使服从不同分布的误差，只要它们有足够多数量、相互独立且都均匀的微小，那么它们的合成分布仍然近似正态分布，并以正态分布为极限。因此，正态分布是随机误差的主要概率分布。

（三）服从正态分布随机误差的特征

对上述测量实例的各种数据进行具体的分析，便可归纳出随机误差有下述四个特性。

1. 有界性

从表 2-1 所列数据可知，在 150 个测量误差中，最大负误差为 $\delta_1=-0.06$s，最大正误差为 $\delta_{14}=0.07$s，所有测量误差均满足下列不等式

$$-0.06 \leqslant \delta_j = x_j - T \leqslant 0.07 \quad (j=1, 2, \cdots, 150)$$

上式给出了摆的 150 次测量中随机误差的界限。这说明在有限次测量中，随机误差总是有界限的，不可能出现无限大的随机误差。据此，可归纳为随机误差的第一特性——有界性，即在一定测量条件下的有限次测量结果中，随机误差的绝对值不会超过某一界限。

对于上述摆的周期测量一例，其 150 个测量误差的绝对值有下列界限，即

$$|\delta_j| \leqslant 0.07\text{s} \quad (j=1, 2, \cdots, 150)$$

这样，在测量时，由于不知被测量的真值，而往往不能确切地获得测量误差的符号和绝对值。但是，随机误差的有界性告诉我们，可以设法应用统一的、科学的分析和试验，合理地估计出随机误差绝对值的界限。以此界限来衡量测量的准确度，并用以比较不同的测量方法。

例如，当已知某测量结果 x 的随机误差界限为 Δ，即有

$$|\delta| \leqslant \Delta$$

因此

$$|x - X_0| \leqslant \Delta$$

这样，经过测量后，虽然未能获得真值 X_0，但是，可以断定真值和测量结果之差的绝对值一般不会超过误差界限 Δ。而且对同一被测量的两个测量结果 x_1 和 x_2，已知它们的误差界限分别为 Δ_1 和 Δ_2，且 $\Delta_1 < \Delta_2$，这样便可断定，第一次测量的准确度高于第二次。

2. 对称性

从表 2-1 所列数据可见，在摆的周期 T 的 150 次测量中发生正误差的次数为 65 次，发生负误差的次数为 61 次。现将绝对值相同的正负误差出现的分布情况列于表 2-3。

表 2-3

绝对误差 $\lvert\delta\rvert$	$+\delta$ 出现次数	$-\delta$ 出现次数
0.01	17	20
0.02	12	14
0.03	12	11
0.04	10	6
0.05	8	6
0.06	4	4
0.07	2	0
$\sum$	65	61

由表 2-3 可见，在摆的周期 T 的 150 次测量中，不仅正误差和负误差

出现的次数大致相同，而且误差绝对值相同的正误差和负误差出现的次数也大致相等，表现出随机误差的对称性。实践证明，继续增加测量次数，正负误差出现的次数将更加接近，随机误差的对称性就更加明显。

据此，归纳为随机误差的第二特性——对称性，即在一定测量条件下的有限次测量结果，其绝对值相等的正误差与负误差出现的次数大致相等。

测量实践表明，绝大多数的随机误差具有对称性，并且在造成随机误差的众多因素中，如不存在对测量结果产生明显影响的因素，则对测量结果的综合影响仍然具有对称性。因此，对称性是随机误差普遍的特性之一。但是，有些因素所造成的随机误差，并不具有对称性或明显的对称性。

3. 抵偿性

由随机误差的对称性知，在有限次测量中，绝对值相同的正负误差出现的次数大致相同。因此，取这些误差的算术平均值时，绝对值相同的正负误差产生相互抵消现象，从而导致了随机误差的第三个特性——抵偿性。

随机误差的抵偿性是指在一定测量条件下，对同一被测量进行多次测量，随机误差的算术平均值随着测量次数的无限增加而趋于零。即成立下列等式：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_j=0 \tag{2-2}$$

随机误差抵偿性，可从测量摆周期的实例中得到说明。从表 2-1 知

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_j &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\delta_i n_i\\ &= \frac{1}{150}\times 0.36\\ &= 0.0024\end{aligned}$$

实践证明，当测量次数 N 足够多时，上式中随机误差的平均值将充分小，即有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_j=0$$

随机误差的抵偿性，表明随机误差的平均值随着测量次数的增加而趋于零。对此很容易联想到测量结果的平均值随着测量次数的增加而趋于真值，这便是算术平均值原理，将在以后的叙述中给以分析。

4. 单峰性

将表 2-1 所列数据稍加整理后，可获得表 2-4 所列的误差在不同区间内出现的次数。

表 2-4

误差区间	误差出现次数
−0.07～−0.05	10
−0.05～−0.03	17
−0.03～−0.01	34
−0.01～0.01	41
0.01～0.03	24
0.03～0.05	18
0.05～0.07	6

从表 2-4 所列数据可知，误差绝对值越小出现的次数越多。例如，在间隔为 0.02 的误差区间(−0.07，−0.05)内，误差出现了 10 次；对同样区间间隔的但绝对值较小的误差区间(−0.01，0.01)内，误差出现了 41 次，形成了峰值。

据此，归纳为随机误差的第四特性——单峰性，即绝对值小的误差出现的次数多于绝对值大的误差出现的次数。

单峰性表明随机误差不会等于零，它总是在零的附近随机的波动，且这种波动时大时小，但是小的波动要多于大的波动。测量实践表明，绝大多数的随机误差以及产生随机误差各因素的综合影响，均具有单峰性。但是，也还有些因素造成的随机误差，不具有这个特性，如数字修约引起的误差。

（四）正态分布的概率计算

关于误差的概率计算有下述几个有关的基本概念。

定义：设单次测量的标准偏差为 σ，对常数 K，称区间$[-K\sigma, K\sigma]$为误差的置信区间；称误差落在区间$[-K\sigma, K\sigma]$以外的概率为显著度，也称显著性水平，用 α 表示，即

$$\alpha = p(|\delta| > K\sigma)$$

称概率 $p = 1-\alpha = p(|\delta| \leqslant K\sigma)$为置信度，也称置信概率。它表示误差 δ 落在区间$[-K\sigma, K\sigma]$内的概率。

关于随机误差服从正态分布的概率计算有下述重要定理：

定理：误差服从正态分布，则对于任意的区间$[-\Delta, \Delta]$，误差落在该区间内的概率为

$$p(|\delta| \leqslant \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) \tag{2-3}$$

式中：σ——标准偏差；

$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du$——拉普拉斯函数，其数值见附表1。

【例 2-1】 已知随机误差服从正态分布，求误差δ落在区间$[-\sigma,\sigma]$内的概率$p(|\delta|\leqslant\sigma)$。

解： 由式(2-3)知：

$$p(|\delta|\leqslant\sigma)=2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(1)$$

由附表1得$\Phi(1)=0.3413$，由此得：

$$p(|\delta|\leqslant\sigma)=2\times0.3413=0.6826$$

此例说明随机误差服从正态分布，且标准偏差为σ，那么在该测量条件下，进行100次测量，可能有68次的随机误差落在区间$[-\sigma,\sigma]$内。

【例 2-2】 已知随机误差服从正态分布，求δ落在$[-3\sigma,3\sigma]$内的概率$p(|\delta|\leqslant3\sigma)$。

解： 由式(2-3)和附表1知：

$$\begin{aligned}p(|\delta|\leqslant3\sigma)&=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)\\&=2\Phi(3)\\&=2\times0.49865\\&=0.9973\end{aligned}$$

以上两例是已知误差分布，计算误差落在某个区间内的概率。反之，确定概率后，同样能计算与之对应的误差区间。

【例 2-3】 已知随机误差服从正态分布，设概率$p=0.95$，求与之对应的误差区间。

解： 由题意和式(2-3)知：

$$p(|\delta|\leqslant\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)=0.95$$

所以

$$\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)=\frac{0.95}{2}=0.475$$

查附表1得

t	1.95	2.00
$\Phi(t)$	0.4744	0.4772

应用内插法计算$\Phi(t)=0.475$的t值，即

$$\begin{aligned}t&=\frac{\Delta}{\sigma}\\&=1.95+\frac{2.00-1.95}{0.4772-0.4744}\times(0.475-0.4744)\end{aligned}$$

$$= 1.95 + \frac{0.05}{0.0028} \times 0.0006$$

$$\approx 1.96$$

所以：$\Delta = 1.96\sigma$，即对应概率 $p = 0.95$ 的误差区间为$[-1.96\sigma, 1.96\sigma]$。

误差落在某区间的概率，从几何意义上讲等于面积。因此，例 2-1、例 2-3 和例 2-2 中的概率 p，可如图 2-6 中的(a)，(b)和(c)表示之。

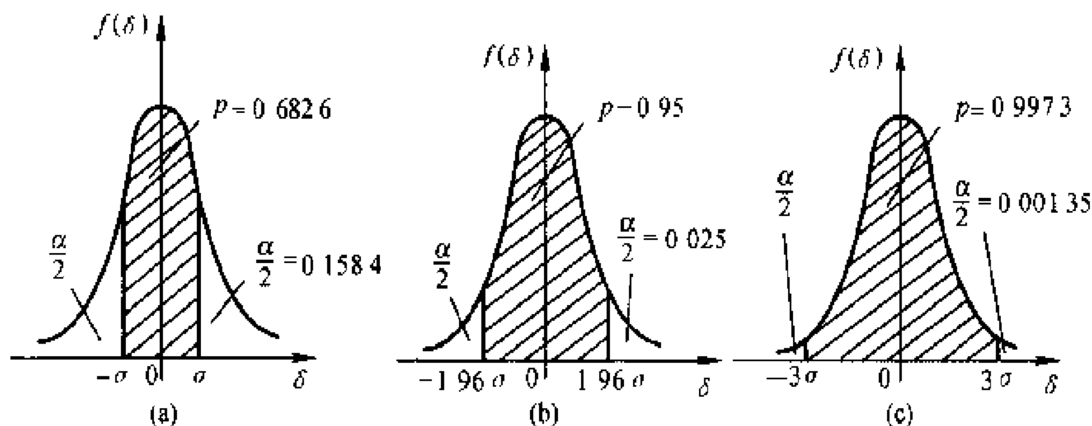


图 2-6

随机误差服从正态分布的概率除用上述的拉普拉斯函数计算外，还可应用标准正态分布函数表达，即

$$p(|\delta| \leqslant K\sigma) = 2\Phi(K) - 1$$

式中：　K——系数，称为置信因子(正态分布)；

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du$——标准正态分布函数，其函数值已编排成表，可在有关的专著中查阅。

二、非正态分布

测量的实践表明，在我们遇到的众多随机误差中，大都服从正态分布，但也还存在非正态分布的随机误差。

1. 均匀分布

均匀分布的基本特征是随机误差在其界限内，出现的概率处处相等。因此，均匀分布又称等概率分布。其概率密度函数为

$$f(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{当 } |\delta| \leqslant a \\ 0 & \text{当 } |\delta| > a \end{cases} \tag{2-4}$$

它的函数图形如图 2-7 所示。由图可见，均匀分布的函数图形为矩形。因

此，又称其为矩形分布。

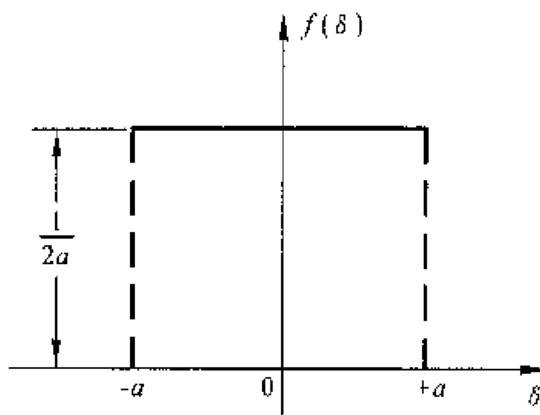


图 2-7

它的数学期望为 $E(\delta)=0$

它的方差为 $\sigma^2=\frac{a^2}{3}$

因此，它的标准偏差为

$$\sigma=\frac{a}{\sqrt{3}} \tag{2-5}$$

均匀分布的误差限为

$$a=\sqrt{3}\sigma \tag{2-6}$$

由概率密度函数性质，可得误差落在区间$[\delta_1,\delta_2]$内的概率为

$$p(\delta_1\leqslant\delta\leqslant\delta_2)=\frac{\delta_2-\delta_1}{2a} \tag{2-7}$$

除舍入误差外，某些仪器度盘刻线误差所引起的角度测量误差，眼睛引起的瞄准误差，计数式仪器在±1 个单位内不能分辨而引起的所谓量化误差等均服从均匀分布。

【例 2-4】 已知测量人员的眼睛瞄准误差服从均匀分布，求测量人员瞄准误差落在区间$[-\sigma,\sigma]$内的概率。

解：由式(2-7)与式(2-6)知，瞄准误差落在区间$[-\sigma,\sigma]$内的概率为

$$p(|\delta|\leqslant\sigma)=\frac{\sigma-(-\sigma)}{2a}=\frac{\sigma}{a}$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{3}\sigma}$$

$$\approx 0.58$$

2. 三角分布

由概率论可知，两个服从相等的均匀分布的相互独立的随机变量之和，仍为随机变量，且服从三角分布。例如，在数字化测量中，长度量值往往由

两次测量之差求得，激光干涉仪测量量块，光电光波比长仪测量刻线尺等均属此种情况。此时，两个量化误差之差(或和)服从三角分布。

三角分布的概率密度函数为

$$f(\delta)=\begin{cases}\dfrac{a+\delta}{a^2} & \text{当} -a\leqslant\delta<0\\[2ex] \dfrac{a-\delta}{a^2} & \text{当} 0<\delta\leqslant a\end{cases} \tag{2-8}$$

其函数图形如图 2-8 所示。

数学期望为

$$E(\delta)=0 \tag{2-9}$$

它的方差为

$$\sigma^2=\frac{a^2}{6} \tag{2-10}$$

因此，它的标准偏差为

$$\sigma=\frac{a}{\sqrt{6}} \tag{2-11}$$

由此得三角分布的误差限为

$$a=\sqrt{6}\sigma \tag{2-12}$$

对任意的$|x|\leqslant a$(误差限)，则误差落在区间$[-x, x]$内的概率由下式确定：

$$p(|\delta|\leqslant x)=\frac{1}{a^2}(2ax-x^2) \tag{2-13}$$

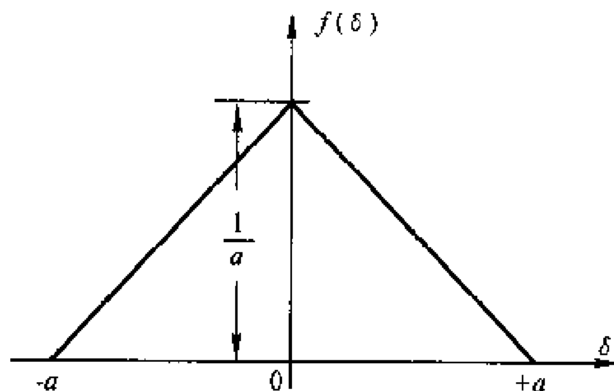


图 2-8

【例 2-5】 已知误差服从三角分布，求误差落在区间$[-\sigma, \sigma]$内的概率。

解： 由式(2-13)与式(2-12)可得：

$$\begin{aligned}p(|\delta|\leqslant\sigma)&=\frac{1}{a^2}(2a\sigma-\sigma^2)\\&=\frac{1}{6\sigma^2}(2\times\sqrt{6}\sigma^2-\sigma^2)\end{aligned}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$$

$$\approx 0.65$$

由图 2-8 知，服从三角分布的随机误差必然有界。即$|\delta|\leqslant a$，且小误差比大误差出现的概率大；绝对值相等的正负误差出现的概率相等。三角分布的这些特征和正态分布相似，所不同的是它的密度函数图形由直线组成，是线性变化。由概率论可知，两个服从三角分布的相互独立的随机变量之和接近正态分布。均匀分布、三角分布和正态分布三者之间的关系，可用图 2-9 概略表示如下。

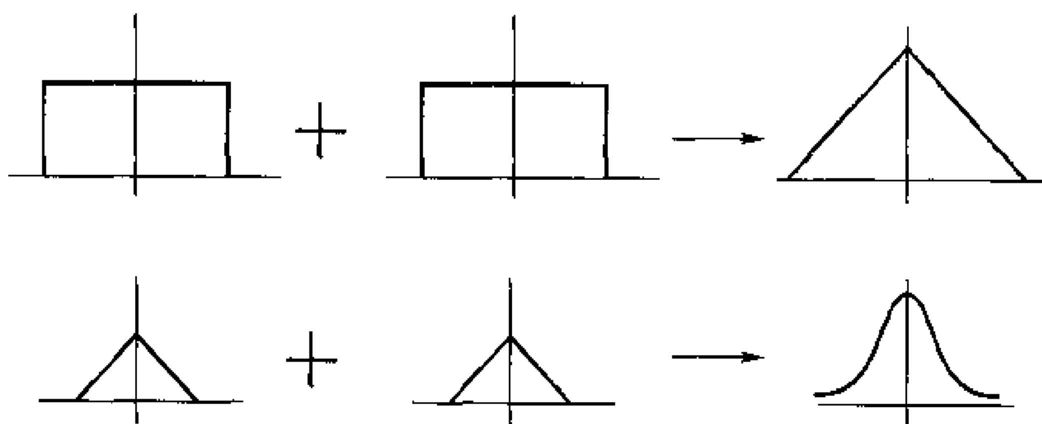


图 2-9

3. 反正弦分布

在无线电计量中，微波信号在传输过程中由于失配要引起信号反射。这种反射最终可表达成相位的正弦或余弦函数 $e\cos\phi$，其中 e 作为反射系数是确定的量值。在长度计量中，测角仪度盘的偏心引起角度测量误差表示为 $e\sin\phi$，其中 e 是度盘的偏心量，ϕ 表示度盘转过角度。

对这类能表示成正弦或余弦函数的随机误差，可以证明：若 ϕ 在区间 $(0,\ 2\pi)$上服从均匀分布，即 ϕ 有概率密度：

$$f(\delta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & |\delta|\leqslant\pi \\ 0 & |\delta|>\pi\end{cases}$$

（如图 2-10 所示），则对于任意常数 e，新随机变量：

$y_1=e\sin\phi$　或　$y_2=e\cos\phi$

服从反正弦分布。它的概率密度为

$$f(\delta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{e^2-\delta^2}} & |\delta|<e \\ 0 & |\delta|\geqslant e\end{cases}\tag{2-14}$$

反正弦分布的图形如图 2-11 所示。对于反正弦分布，
数学期望为

$$E(\delta)=0 \tag{2-15}$$

方差为

$$\sigma^2=\frac{e^2}{2} \tag{2-16}$$

标准偏差为

$$\sigma=\frac{e}{\sqrt{2}} \tag{2-17}$$

误差限为

$$e=\sqrt{2}\sigma \tag{2-18}$$

误差落在区间$[\delta_1,\delta_2]$内的概率为

$$p(\delta_1\leqslant\delta\leqslant\delta_2)=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin\frac{\delta_2}{e}-\arcsin\frac{\delta_1}{e}\right) \tag{2-19}$$

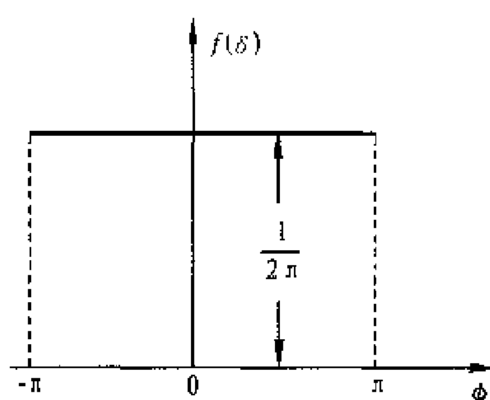


图 2-10

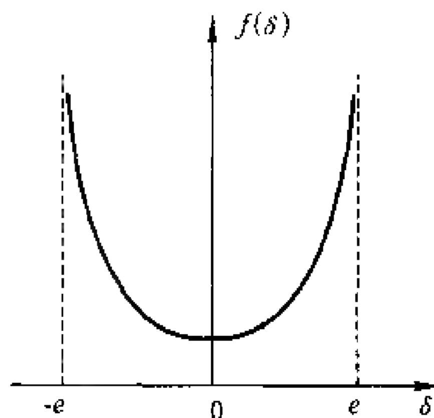


图 2-11

【例 2-6】 求服从反正弦分布的随机误差落在区间$[-\sigma,\sigma]$内的概率。

解： 由式(2-19)和式(2-18)知：

$$\begin{aligned}p(|\delta|\leqslant\sigma)&=p(-\sigma\leqslant\delta\leqslant\sigma)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma}-\arcsin\frac{-\sigma}{\sqrt{2}\sigma}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&=0.5\end{aligned}$$

由式(2-14)和图 2-11 可知，反正弦分布仍具备有界性、抵偿性、对称性和单峰性。但是，反正弦分布的“峰”形呈凹型，此时大误差出现的概率要比小误差出现的概率大。这一点与正态分布的情况不同。

4. χ^2 分布

设随机变量 X_1，X_2，…，X_ν 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$，则随机变量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\nu^2 \tag{2-20}$$

的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{2-21}$$

我们称随机变量 χ^2 服从自由度 ν 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim \chi^2(\nu)$，这里的自由度 ν 不妨理解为独立随机变量的个数。图 2-12 给出了自由度 $\nu=1$，$\nu=2$，及 $\nu=6$ 时分布的分布曲线。

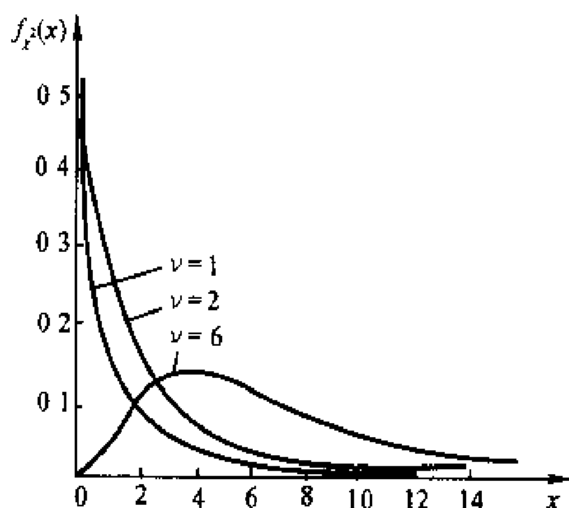


图 2-12

χ^2 分布的主要特征量为

$$\mu = \nu \tag{2-22}$$

$$\sigma^2 = 2\nu \tag{2-23}$$

$$\sigma = \sqrt{2}\nu \tag{2-24}$$

由图 2-12 的三条曲线可看出，当 ν 逐渐增大时，曲线逐渐接近对称。可以证明，当 n 充分大时，χ^2 曲线趋近正态分布曲线。

在最小二乘法原理中要应用 χ^2 分布的概念，此外，它也是 t 分布和 Γ 分布的基础。

5. t 分布

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$，Y 服从

自由度为ν的χ^2分布，则随机变量

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}} \tag{2-25}$$

的概率密度为

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \tag{2-26}$$

我们称随机变量t服从自由度为ν的t分布，记作$t \sim t(\nu)$。分布曲线如图 2-13。

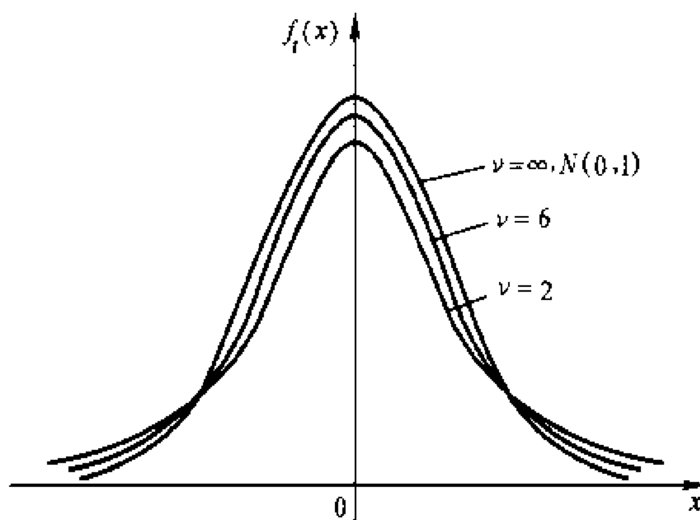


图 2-13

t分布的主要分布特征量为

$$\mu = 0 \tag{2-27}$$

$$\sigma^2 = \frac{\nu}{\nu-2} \tag{2-28}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} \qquad \nu > 2 \tag{2-29}$$

可以证明，当自由度较小时，t分布与正态分布有明显区别，但当自由度$\nu \to \infty$时，t分布曲线趋于正态分布曲线。而事实上，当$\nu > 30$时，它们的分布曲线就几乎是相同的了。

t分布是一种重要分布，当测量列的测量次数较少时，其误差分布通常认为服从t分布。因此t分布在测量不确定度的评定中占有重要地位。

6. F分布

设随机变量X与Y相互独立，分别服从自由度为ν_1与ν_2的χ^2分布，

则随机变量

$$F=\frac{X/\nu_1}{Y/\nu_2} \tag{2-30}$$

的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}\dfrac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{2-31}$$

我们称随机变量 F 服从自由度为(ν_1,ν_2)的 F 分布，记作 $F\sim F(\nu_1,\nu_2)$。其分布曲线如图 2-14。

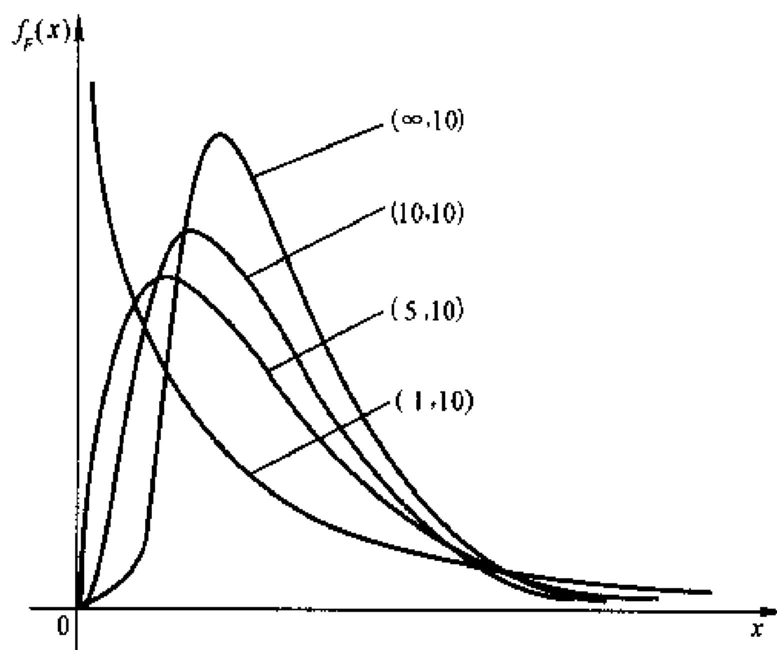


图 2-14

F 分布的主要分布特征量为

$$\mu=\frac{\nu_2}{\nu_2-2}\quad(\nu_2>2) \tag{2-32}$$

$$\sigma^2=\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}\quad(\nu_2>4) \tag{2-33}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}}\quad(\nu_2>4) \tag{2-34}$$

F 分布也是一种重要的分布，它在统计检验中经常应用，在回归方程的显著性检验中也是应用 F 分布的原理。

第三节　算术平均值原理

一、算术平均值原理

对某一量进行一系列等精度测量，由于存在随机误差，其测得值皆不相同，应以全部测得值的算术平均值作为最后测量结果。

在系列测量中，被测量的 n 个测得值的代数和除以 n 而得到的值称为算术平均值。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 次测量所得的值，则算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2-35}$$

算术平均值与被测量的真值最为接近，由概率论的大数定律可知，若测量次数无限增加，则算术平均值 $\bar{x}$ 必然趋近于真值 X_0。

由误差的定义可知

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - nX_0 \tag{2-36}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - nX_0 \tag{2-37}$$

$$X_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n} \tag{2-38}$$

根据正态分布随机误差的抵偿性可知：

当 $n \to \infty$ 时，有 $\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n} \to 0$，所以

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \to X_0 \tag{2-39}$$

由此可见，如果能够对某一量进行无限多次测量，就可得到不受误差影响的测量值，或其影响甚微，可予忽略。这就是当测量次数无限增大时，算术平均值(数学上称之为最大或然值)被认为是最接近于真值的理论依据。由于实际上都是有限次测量，我们只能把算术平均值近似地作为被测量的真值。

二、残余误差

由于真值具有不可知性，导致误差不能准确求出。由算术平均值原理

可知，算术平均值是真值的最佳估计值，用算术平均值代替真值计算得到的误差称为残余误差。

在规定测量条件下，同一被测量的测量列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有算术平均值：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2-40}$$

则称

$$v_i = x_i - \bar{x} \tag{2-41}$$

为残余误差。残余误差可求，式(2-41)又称实用误差公式。残余误差具有两个重要特性。

1. 残余误差具有低偿性——残余误差代数和等于零

设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为测量列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的残余误差列，则

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0 \tag{2-42}$$

证明：由残余误差定义知

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - nX_0 = 0$$

残余误差的抵偿性在误差理论研究上有着重要作用，同时还可用来检验残余误差或算术平均值的计算是否正确。如果一组残余误差 $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$，说明它们的计算过程无误，否则便是计算过程有错。

【例 2-7】 现有残余误差列：$v_1 = +1.4$，$v_2 = +1.6$，$v_3 = +2.5$，$v_4 = -3.2$，$v_5 = -2.6$，$v_6 = -2.4$，$v_7 = +2.7$。问此列残余误差的计算是否正确。

解：

$$\begin{aligned} & v_1 + v_2 + \cdots + v_7 \\ &= 1.4 + 1.6 + 2.5 - 3.2 - 2.6 - 2.4 + 2.7 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此，根据式(2-42)残余误差列计算正确。

在计算算术平均值 $\bar{x}$ 时，会遇到除不尽需截取多余位数而产生舍入误差的情况，此时

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + H \tag{2-43}$$

式中：H——$\bar{x}$ 的舍入项。

由式(2-40)和式(2-43)得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} v_i &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + H\right) = -nH$$

将式(1-10)代入上式使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} v_i\right| = |-nH| = n|H| \leqslant n \cdot \frac{10^m}{2} \qquad (2\text{-}44)$$

综上所述，当算术平均值 x 在计算中不存在舍入误差时，式(2-42)可用于检验 x 及 v_i 计算的正确性。当 x 含有舍入误差时，此时残余误差就满足式(2-44)，否则，x 或 v_i 的计算有误。

【例 2-8】 已知测量列 $x_1=1.35$，$x_2=1.39$，$x_3=1.36$，$x_4=1.32$，$x_5=1.35$，$x_6=1.38$，$x_7=1.34$，$x_8=1.34$。求它们的残余误差。

解：先计算测量值的算术平均值：

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{1}{8} \times (1.35 + 1.39 + 1.36 + 1.32 + 1.35 + 1.38 + 1.34 + 1.34)$$

$$= \frac{10.83}{8}$$

$$= 1.353\ 75$$

$$\approx 1.354$$

计算残余误差 $v_i = x_i - \bar{x}$：

$v_1=-0.004$　$v_2=+0.036$　$v_3=+0.006$　$v_4=-0.034$

$v_5=-0.004$　$v_6=+0.026$　$v_7=-0.014$　$v_8=-0.014$

此时

$$\left|\sum_{i=1}^{n} v_i\right| = 0.02 \leqslant \frac{8}{2} \times 10^{-3} = 0.004$$

由式(2-44)知，$\bar{x}$ 和 v_i 的计算无误。

2. 残余误差平方和为最小

设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为测量列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的残余误差列，则

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = 最小 \qquad (2\text{-}45)$$

证明略(可参见第 8 章线性参数最小二乘法处理)。

残余误差平方和为最小构成了最小二乘原理的理论依据，也是组合测量、曲线拟合的理论基础。

第四节　测量的标准偏差

对真值为 X_0 的被测量，在一定的条件下进行 n 次重复测量得 n 个测量

结果 x_1，x_2，…，x_n。由于随机误差的存在，致使诸测量结果 x_i 不尽相等。测量结果越分散，说明随机误差越大，测量结果越集中，说明随机误差越小。显然，这种分散性来源于测量过程。当测量装置、测量方法、测量环境和测量人员确定以后，测量结果的分散性也随之确定。上述因素的改变，也必然导致分散性的改变。这些只是定性的分析，关键是选择一个衡量测量的分散性，评定随机误差的定量指标。在第二节里，我们已知道正态分布的标准偏差 s 决定了正态分布曲线的形状，它的数值大小决定了误差分布的分散与集中。因此，标准偏差可作为衡量随机误差分散性的指标。

一、单次测量的标准偏差

定理：同一被测量，在相同条件下，测量列 $x_i(x=1, 2, \cdots, n)$ 中单次测量的标准偏差(也称单次测量的标准不确定度)是表征同一被测量值 n 次测量所得结果的分散性的参数，并按下式计算。

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-X_0)^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}} \tag{2-46}$$

式中：n——测量次数(充分大)；

δ_i——测量结果 x_i 的随机误差。

式(2-46)即为正态分布函数式(2-1)中标准偏差 σ 的含义。

【例 2-9】 已知被测轴的直径约定真值 $X_0'=(40+0.003\ 5)\text{mm}$。用量块作标准，在立式光学计上重复测量 260 次，并用 x_i 表示第 i 种测量结果(单位：μm)。n_i 表示 x_i 出现的个数。有关数据列于下表，求单次测量的标准偏差。

x_i	3.3	3.6	3.8	3.0	3.5	3.4	3.9	3.1	3.7	4.0	3.2
n_i	30	40	20	3	50	44	11	10	29	1	22
x_i-X_0	−0.2	+0.1	+0.3	−0.5	0.0	−0.1	+0.4	−0.4	+0.2	+0.5	−0.3
δ_i^2	0.04	0.01	0.09	0.25	0.00	0.01	0.16	0.16	0.04	0.25	0.09

解：由式(2-46)知

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}$$

$$=\Big[\frac{1}{260}(0.04\times 30+0.01\times 40+0.09\times 20+0.25\times 3+$$

$$0.00\times 50+0.01\times 44+0.16\times 11+0.16\times 10+0.04\times 29+$$

$$0.25\times 1+0.09\times 22)\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{11.34}{260}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 0.2(\mu\mathrm{m})$$

由式(2-46)确定的单次测量标准偏差 s 是指在该测量条件下，对被测量进行任何一次测量其标准偏差均为 σ。在统计意义上，不仅例 2-9 中 260 次重复测量的任何一次的标准偏差为 $\sigma=0.2\mu\mathrm{m}$，且在此测量条件下，对该被测量再进行一次测量，也认为其标准偏差 $\sigma=0.2\mu\mathrm{m}$ 。

【例 2-10】 对上例的轴，用千分尺测量 260 次，测量的有关数据列于下表，求单次测量的标准偏差。

$x_i/\mu\mathrm{m}$	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	9	14	17	19	29	37	39	30	23	18	12	8	3
x_i-X_0	−6.5	−5.5	−4.5	−3.5	−2.5	−1.5	−0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
δ_i^2	42	30	20	12	6.2	2.2	0.25	0.25	2.2	6.2	12	20	30	42

解：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}$$

$$=\Big[\frac{1}{260}(0.25\times 76+2.2\times 59+6.2\times 42+12\times 35+$$

$$20\times 26+30\times 17+42\times 5)\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{2069.1}{260}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 3\mu\mathrm{m}$$

从上述二例可见，同一被测量在不同的测量条件下测量时，其单次测量的标准偏差不同。标准偏差小说明测量结果的分散性小，亦即测量的随机误差分散性小，此测量有较高的精度；反之，标准偏差大说明测量结果的分散性大，测量的随机误差分散，测量的精度低。

定义： 标准偏差相等的测量称为等精度测量。

对于在相同测量条件下所作的重复测量均为等精度测量。对同一被测量用不同的仪器进行测量，或在不同的环境中进行测量，或用不同的方法进行测量，此时测量条件不同，所得测量结果的标准偏差不等。因此，这些

测量属不等精度测量。

二、标准偏差的基本估计——贝塞尔公式

在应用式(2-46)计算标准偏差时，必须事先知道被测量的真值。而真值往往是未知的，使标准偏差 σ 理论上不可求。因此，需寻求 σ 的估计量。

由算术平均值原理可知，算术平均值是真值的最佳估计值，用算术平均值代替真值，用残余误差 v_i 代替真误差 δ_i，求出标准偏差的估计值是解决计算标准偏差 σ 的一条途径。

1. 贝塞尔公式

定理：对同一被测量，在相同测量条件下，进行有限次测量得测量列 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，则单次测量标准偏差的估计值为

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}} \tag{2-47}$$

证明：设被测量的真值为 X_0，由测量值 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$得算术平均值：

$$\bar{x}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$$

以及测量的随机误差：

$$\begin{aligned}\delta_i&=x_i-X_0\\&=x_i-\bar{x}+\bar{x}-X_0\\&=v_i+\bar{x}-X_0\end{aligned} \tag{2-48}$$

由绝对误差的定义知，算术平均值的绝对误差应为

$$\delta_{\bar{x}}=\bar{x}-X_0$$

将上式代入式(2-48)得

$$\delta_i=v_i+\delta_{\bar{x}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

由此得联立式：

$$\begin{aligned}\delta_1&=v_1+\delta_{\bar{x}}\\\delta_2&=v_2+\delta_{\bar{x}}\\&\vdots\\\delta_n&=v_n+\delta_{\bar{x}}\end{aligned} \tag{2-49}$$

将联立式(2-49)各式相加，并由式(2-42)得

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}v_i+n\delta_{\bar{x}}=n\delta_{\bar{x}} \tag{2-50}$$

将式(2-50)两边平方，共整理后得

$$\delta_{\bar{x}}^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)^2}{n^2} \tag{2-51}$$

由多项式定理知

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2+2\sum_{i\neq j}\delta_i\delta_j \tag{2-52}$$

由随机误差的对称性知，当 n 充分大时，可认为

$$\sum_{i\neq j}\delta_i\delta_j=0$$

上式代入式(2-52)得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 \tag{2-53}$$

式(2-53)代入式(2-51)得

$$\delta_{\bar{l}}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n^2} \tag{2-54}$$

再将联立式(2-49)两边平方后相加，得

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}v_i^2+n\delta_{\bar{l}}^2 \tag{2-55}$$

式(2-54)代入式(2-55)，整理后得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}$$

上式两边开方，并由式(2-46)得

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}} \tag{2-56}$$

贝塞尔公式给出了有限次重复测量，单次测量的标准偏差(估计量)。有时为了区别于定义的标准偏差，将由贝塞尔公式计算得到的标准偏差估计量用 s 表示。其中 $n-1$ 称为自由度。

从式(2-47)可见，用贝塞尔公式计算标准偏差时，当测量次数 $n=1$，则公式成 $\frac{0}{0}$ 不定型无法计算。因此，在应用贝塞尔公式时，测量次数必须满足 $n\geqslant 2$。

【例 2-11】 用千分尺测量某尺寸 9 次，数据如下表所列(单位：mm)，求其算术平均值和单次测量标准偏差。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	20.639	20.636	20.638	20.632	20.632	20.634	20.635	20.633	20.636

解： 注意到 x_i 之间只是末位不相同，因此，在求平均值时，只须求它们

末位的平均值，即

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=20.630+\frac{1}{9}\times(0.009+0.006+0.008+0.002+0.002+0.004+0.005+0.003+0.006)$$

$$=20.630+\frac{1}{9}\times 0.045$$

$$=20.630+0.005$$

$$=20.635(\text{mm})$$

按式(2-41)计算残余误差 v_i 和 v_i^2，其值列于下表：

$v_i\times10^{-3}$	4	1	3	−3	−3	−1	0	−2	1
$v_i^2\times10^{-6}$	16	1	9	9	9	1	0	4	1

由式(2-47)得单次测量标准偏差：

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}$$

$$=\left[\frac{(16+1+9+9+9+1+0+4+1)\times10^{-6}}{9-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{50\times10^{-6}}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=0.002\ 5(\text{mm})$$

如图 1-2 所示，实际测量圆的直径时，必然存在瞄准误差。此项误差应属于随机误差，它的大小表现为瞄准的分散性程度。为了确定瞄准的标准偏差，测量人员在其他条件不变的情况下进行多次瞄准，即调整仪器，用眼通过显微镜观察，使指标线与圆“相切”，并从仪器读取读数 x_1。再重新调整仪器，使指标线脱离圆的影像后再次“相切”，读取读数 x_2。重复上述步骤继续读得 x_3，x_4，…。因为估读误差比瞄准误差要小得多，所以这些读数的分散性即可认为是测量人员瞄准的精密度。

【例 2-12】 将测量人员 15 次瞄准读数列于下表(单位：μm)：

n_i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2.4	4.6	4.8	3.5	4.5	5.6	3.5	4.3
n_i	9	10	11	12	13	14	15	
x_i	3.8	4.5	6.3	4.8	4.7	5.3	3.4	

求其算术平均值以及单次瞄准的标准偏差。

解：15 次瞄准的算术平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=\frac{1}{15}\times(2.4+4.6+4.8+3.5+4.5+5.6+3.5+4.3+$$

$$3.8+4.5+6.3+4.8+4.7+5.3+3.4)$$

$$=\frac{1}{15}\times 66.0$$

$$=4.4(\mu\text{m})$$

按式(2-42)计算残余误差 v_i 和 v_i^2，并将数值列于下表：

v_i	−2.0	+0.2	+0.4	−0.9	+0.1	+1.2	−0.9	−0.1
v_i^2	4.00	0.04	0.16	0.81	0.01	1.44	0.81	0.01
v_i	−0.6	+0.1	+1.9	+0.4	−0.3	+0.9	−1.0	
v_i^2	0.36	0.01	3.61	0.16	0.09	0.81	1.00	

按式(2-47)计算单次瞄准标准偏差：

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{13.32}{15-1}}=\sqrt{0.951\ 4}=0.975\ 4\approx 0.98(\mu\text{m})$$

从例 2-12 可见，我们想要知道某项因素(如瞄准)的标准偏差，那么，在设法保持其他测量条件(如测量的环境、装置和方法)不变的情况下，测量出该项随机误差的分散性。显然，在测量过程中，其他条件不可能绝对不变，即测得的分散性实际上不仅仅是该项因素(如瞄准)引起的。但是，其他因素已是相对稳定，主要是因为该项因素(多次瞄准)造成的，所以，这项分散性可认为是该项因素(瞄准)的分散性。此例提供的分析单项因素造成的标准偏差的思路是常用和有效的。

贝塞尔公式较理想地解决了标准偏差的计算问题，由它确定的标准偏差 s 有较高的精度。它是由式(2-46)定义的标准偏差 σ 的最基本的估计量。由于它在测量领域里被普遍而广泛的应用而显得十分重要。

2. 实验标准偏差 s 的标准差

设在同一条件下，对被测量进行 n_1 次等精度测量，得测量列 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$。用贝塞尔公式即可求得单次测量标准偏差 s_1。仍在该条件下，再进行 n_2 次测量，同样又可得到单次测量标准偏差 s_2。我们发现，无论两次的测量次数 n_1 和 n_2 是否相等，而 s_1 和 s_2 不一定相等，这说明由贝塞尔公式计算所得的测量标准偏差，也存在误差。由式(2-47)所确定的标准偏

差 s 的标准偏差 s_s 由下式确定，即

$$s_s = \frac{s}{\sqrt{2(n-1)}} \tag{2-57}$$

式中：s——用贝塞尔公式计算得的单次测量的标准偏差；

　　n——测量次数；

　　s_s——s的标准偏差。

例如，等精密度测量列 $x_i(i=1, 2, \cdots, 10)$，用贝塞尔公式计算得 $s=0.01$，则由式(2-57)可得 s 的标准偏差：

$$s_s = \frac{0.01}{\sqrt{2(10-1)}} \approx 0.002$$

由式(2-57)可得 s_s 和 s 的比值为

$$\frac{s_s}{s} = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$$

因此，当 $n=3$ 时，则 $s_s/s=1/2$；

　　当 $n=9$ 时，则 $s_s/s=1/4$；

　　当 $n=19$ 时，则 $s_s/s=1/6$。

由此可知，标准偏差 s 随着测量次数的增加，其精密度也随之提高。特别当 $n\to\infty$时，则由式(2-57)知，$s_s\to 0$，即标准偏差 s 趋于理论值 σ。在一般的情况下，为了保证 s 的精度，同时考虑工作量，在用贝塞尔公式计算标准偏差时，要求测量次数 $n\geqslant 6$ 次，此时 s_s 相对于 s 的比值不超过 1/3，即 $s_s/s\leqslant 1/3$。

三、算术平均值标准偏差

对有限次重复性测量，是以算术平均值作为测量结果，而算术平均值是真值的近似值，因此必须研究算术平均值不可靠性的评定标准。

如果在相同条件下对同一量值作多组重复的系列测量，每一系列测量都有一个算术平均值，由于误差的存在，各个测量列的算术平均值也不相同，它们围绕着被测量的真值有一定的分散，此分散说明了算术平均值的不可靠性，而算术平均值的标准差 $s(\bar{x})$则是表征同一被测量的各个独立测量列算术平均值分散性的参数，可作为算术平均值不可靠性的评定标准。

由式(2-20)已知算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

因各次测量值间独立，根据传播律得方差

$$D(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}[D(x_1) + D(x_2) + \cdots + D(x_n)]$$

因等精度，所以

$$D(x_1)=D(x_2)=\cdots=D(x_n)=D(x)$$

故有

$$D(\bar{x})=\frac{1}{n^2}nD(x)=\frac{1}{n}D(x)$$

所以

$$s(\bar{x})^2=\frac{s^2}{n}$$

$$s(\bar{x})=\frac{s}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n(n-1)}} \tag{2-58}$$

由此可知，在 n 次测量的等精度测量列中，算术平均值的标准差为单次测量标准差的 $1/\sqrt{n}$，当测量次数 n 愈大时，算术平均值愈接近被测量的真值，测量精度也愈高。

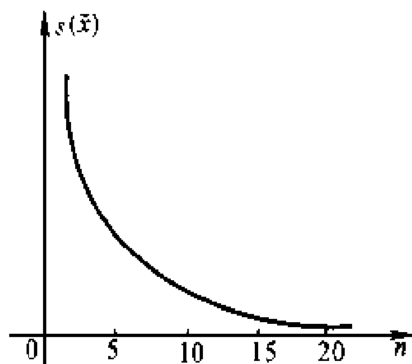


图 2-15

增加测量次数，可以提高测量精度，但是由式(2-58)可知，测量精度是与测量次数的平方根成反比，因此，要显著地提高测量精度，必须付出较大的劳动。由图 2-15 可知，s 一定时，当 $n>10$ 以后，$s(\bar{x})$已减少得非常缓慢。由于测量次数愈大，也愈难保证测量条件的恒定，从而带来新的误差，因此一般情况下取 $n=10$ 以内较为适宜。总之，要提高测量精度，应采用适当精度的仪器，选取适当的测量次数。

算术平均值的标准差也称为算术平均值的标准不确定度，简称标准不确定度。

【例 2-13】 对被测量作 9 次等精度测量得测量结果：29.18，29.20，29.21，29.19，29.21，29.25，29.26，29.27，29.24。求平均值及其标准偏差(略去量的单位)。

解：求算术平均值：

$$\bar{x}=\frac{1}{9}(29.18+29.20+29.21+29.19+29.21+29.25+29.26+29.27+29.24)$$
$$=29.22$$

由式(2-58)得 $\bar{x}$ 的标准偏差：

$$s(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n(n-1)}}$$

$$= \left\{\frac{1}{9(9-1)}[(-0.04)^2+(-0.02)^2+(-0.01)^2+(-0.03)^2+(-0.01)^2+(0.03)^2+(0.04)^2+(0.05)^2+(0.02)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 0.01$$

【例 2-14】 已知测量的单次测量标准偏差 $s=0.12$(略去单位)。问在不改变测量条件的情况下，使被测量估计值的标准偏差达到 0.04，需测量多少次？

解：以算术平均值作为被测量的估计值，适当增加测量次数，以满足测量精密度的需要。

由式(2-58)得

$$\sqrt{n}=\frac{s}{s(\bar{x})}$$

即测量次数

$$n=\left(\frac{s}{s(\bar{x})}\right)^2=\left(\frac{0.12}{0.04}\right)^2=9(\text{次})$$

即对被测量进行 9 次以上重复测量，它们的算术平均值的精密度便可达到要求。

四、标准偏差的其他估计方法

除了贝塞尔公式外，实际测量中还使用极差法和最大误差法等来计算标准偏差。

1. 极差法

用贝塞尔公式计算标准差需先求算术平均值，再求残余误差，然后进行其他计算，计算过程比较复杂。当要求简便迅速算出标准差时，可用极差法。

若等精度多次测量测得值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 服从正态分布，在其中选取最大值 x_{max} 与最小值 x_{min}，则两者之差称为极差

$$\omega_n = x_{max} - x_{min} \tag{2-59}$$

根据极差的分布函数，可求出极差的数学期望为

$$E(\omega_n) = d_n s \tag{2-60}$$

因

$$E\left(\frac{\omega_n}{d_n}\right)=s$$

故可得 s 的无偏差估计值，若仍以 s 表示，则有

$$s=\frac{\omega_n}{d_n} \tag{2-61}$$

式中 d_n 的数值见表 2-5。

表 2-5

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_n	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08	3.17
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
d_n	3.26	3.34	3.41	3.47	3.53	3.59	3.64	3.69	3.74	

极差法可简单迅速算出标准差，并具有一定精度，一般在 $n<10$ 时均可采用。

【例 2-15】 用游标卡尺对某一尺寸测量 10 次，假定已消除系统误差和粗大误差，得到数据如下(单位为 mm)：

75.01，75.04，75.07，75.00，75.03，75.09，75.06，75.02，75.05，75.08

用极差法求标准差。

解：

$$\omega_n = l_{max} - l_{min} = 75.09\text{mm} - 75.00\text{mm} = 0.09\text{mm}$$

$$d_{10} = 3.08$$

$$s = \frac{\omega_n}{d_n} = \frac{0.09}{3.08} = 0.0292(\text{mm})$$

2. 最大误差法

在有些情况下，我们可以知道被测量的真值或规定准确度的用来代替真值使用的量值(称为实际值或约定真值)，因而能够计算出随机误差 δ_i，取其中绝对值最大的一个值 $|\delta_i|_{max}$，当各个独立测量值服从正态分布时，则可求得关系式

$$s = \frac{|\delta_i|_{max}}{K_n} \tag{2-62}$$

一般情况下，被测量的真值为未知，不能按式(2-62)求标准差，应按最大残余误差 $|v_i|_{max}$ 进行计算(亦称最大残差法)，其关系式为

$$s = \frac{|v_i|_{max}}{K'_n} \tag{2-63}$$

式(2-62)和式(2-63)中两 K_n、K'_n 系数的倒数见表 2-6。

表 2-6

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1/K_n$	1.25	0.88	0.75	0.68	0.64	0.61	0.58	0.56	0.55	0.53
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$1/K_n$	0.52	0.51	0.50	0.50	0.49	0.48	0.48	0.47	0.47	0.46

续表

N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$1/K_n$	0.46	0.45	0.45	0.45	0.44	0.44	0.44	0.44	0.43	0.43
N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
$1/K'_n$	1.77	1.02	0.83	0.74	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.51
N	20	25	30							
$1/K'_n$	0.48	0.46	0.44							

最大误差法简单、迅速、方便，容易掌握，因而有广泛用途。当 $n<10$ 时，最大误差法具有一定的精度。

【例 2-16】 仍用例 2-15 的测量数据，按最大误差法求标准差。

解：

$$|v_i|_{max}=0.045\text{mm}$$

$$\frac{1}{K'_{10}}=0.57$$

故标准差为

$$s=\frac{|v_i|_{max}}{K'_n}=0.57\times 0.045=0.025\ 6\text{mm}$$

【例 2-17】 某激光管发出的激光波长经检定为 $\lambda=0.632\ 991\ 30\mu\text{m}$，由于某些原因，未对此检定波长作误差分析，但后来又用更精确的方法测得激光波长 $\lambda=0.632\ 991\ 44\mu\text{m}$，试求原检定波长的标准差。

解： 因后测得的波长是用更精确的方法，故可认为其测得值为实际波长(或约定真值)，则原检定波长的随机误差 δ 为

$$\delta=0.632\ 991\ 30-0.632\ 991\ 44=-14\times 10^{-8}(\mu\text{m})$$

$$\frac{1}{K_1}=1.25$$

故标准差为

$$s=\frac{|\delta|}{K_1}=1.25\times 14\times 10^{-8}=1.75\times 10^{-7}(\mu\text{m})$$

在代价较高的实验中(如破坏性实验)，往往只进行一次实验，此时贝塞尔公式成为 $\frac{0}{0}$ 形式而无法计算标准差，在这种情况下，又特别需要尽可能精确地估算其精度，因而最大误差法就显得特别有用。

以上介绍的标准差其他两种计算法，简便易行，具有一定的精度，但其可靠性均较贝塞尔公式要低，因此对重要的测量或几种计算方法的结果出现矛盾时，仍应以贝塞尔公式为准。

第五节 极限误差

一、极限误差的定义

测量的目的在于掌握被测对象的客观实际状态(真值)，但测量结果总含有误差，在数据上总不等于被测量的真值。测量结果与被测量的差异是由两部分组成的：一部分是由于随机误差的存在而引起的；另一部分是由于不能完全消除的系统误差的存在而引起的。对于随机误差造成的那部分差异的确定，通常用估计随机误差界限，即确定随机极限误差的办法来解决。

极限误差是指极端误差，是误差不应超过的界限，此时对被测量的测量结果(单次测量或测量列的算术平均值)的误差，不超过极端误差的量信概率为 p，并使差值 $1-p=\alpha$ 可以忽略。此极端误差称为测量的极限误差，并以 Δ 表示。

极限误差 Δ 的值可依据测量标准差、误差分布及要求的置信概率确定：

$$\Delta = ks \tag{2-64}$$

或

$$\Delta = ks(\bar{x}) \tag{2-65}$$

k 称为置信因子，是误差分布、自由度和置信概率的函数，通常有表可查。

假定测量仅存在随机误差，$(-\Delta, \Delta)$ 为估计出的测量结果 x 的误差区间，那么由误差的定义可知：

$$|\delta| = |x - X_0| \leqslant \Delta \tag{2-66}$$

$$(x-\Delta) \leqslant X_0 \leqslant (x+\Delta) \tag{2-67}$$

上式给出了真值可能出现的范围。

例如某被测量的测量结果为 78.36(略去单位)，经估计量信限 $\Delta=0.05$，则由式(2-67)知，被测量真值 X_0 的可能范围为

$$(x-\Delta)=78.31 \leqslant X_0 \leqslant (x+\Delta)=78.41$$

上式仅说明了真值 X_0 在上述的范围内，但并不能确定在这个范围的哪个值上。

二、单次测量的极限误差

测量实践表明，绝大多数的随机误差是服从正态分布的，即使在测量中存在非正态分布的随机误差，它们对测量的综合影响也往往接近正态分布。鉴于上述原因，确定极限误差的一般方法是以随机误差服从正态分布

为前提的。

例如，某被测量的测量结果 $x=12.68$（略去单位），已知测量的标准偏差 $\sigma=0.01$，当置信因子 k 分别等于 1，2 和 3 时，便有下列对应的随机不确定度 $k\sigma$ 和置信概率：

(a) $\sigma=0.01$　　　$1-\alpha=68.27\%$

(b) $2\sigma=0.02$　　　$1-\alpha=95.45\%$

(c) $3\sigma=0.03$　　　$1-\alpha=99.73\%$

由式(2-67)知，此时，被测量真值 X_0 的不确定范围以及对应的置信概率分别为

(a) $12.67\leqslant X_0\leqslant 10.69$　$p=68.27\%$

(b) $12.66\leqslant X_0\leqslant 12.70$　$p=95.45\%$

(c) $12.65\leqslant X_0\leqslant 12.71$　$p=99.73\%$

由此可见，(a)的置信区间最小，真值可能出现的范围也小。但是，与此对应的置信概率也小，确定真值在此范围内的把握只有 68.27%，显然不可靠，也就是说，被测量真值也很可能不在此范围内。因此，描述真值可能出现的范围，不仅需要给出确切的区间，同时要给出相应的置信概率。而且为了可靠地确定真值的范围，给出的置信概率要适当。

我们知道，置信区间 $[-k\sigma, k\sigma]$ 和置信概率 p 是相互对应的。给定显著度 α，便有置信概率 $p=1-\alpha$，且由式(2-3)随之确定了对应的置信区间。反之亦然，对于给定的置信区间，由式(2-3)便可求得相应的置信概率 p 与之对应。表 2-7 对几个典型的置信因子 k 列出相应的置信区间的置信概率、显著度以及它们与测量次数 n 的关系。

表 2-7

k	$k\sigma$	$p=1-\alpha$ $=p(\lvert\delta\rvert\leqslant k\sigma)$ $=2\Phi(k)$	$\alpha=p(\lvert\delta\rvert>k\sigma)$ $=1-2\Phi(k)$	测量次数 n	$\lvert\delta\rvert>k\sigma$ 的可能次数
0.67	0.67σ	0.497 2	0.502 8	2	1
1	σ	0.682 6	0.317 4	3	1
2	2σ	0.954 5	0.045 5	22	1
3	3σ	0.997 3	0.002 7	370	1
4	4σ	0.999 9	0.000 1	15 626	1

由表 2-7 可见，随着置信因子 k 的增大，显著度 α 减小很快。当 $k=0.67$ 时，被测量的 2 次重复测量中，就可能有 1 次随机误差的绝对值 $|\delta|>0.67\sigma$。当 $k=1$ 时，被测量的 3 次重复测量中，可能有 1 次随机误差的绝对

值$|\delta|>\sigma$。而当$k=3$时；在 370 次重复测量中，才可能有 1 次左右的测量随机误差绝对值$|\delta|>3\sigma$。在一般的情况下，测量次数不会超过十次至几十次。因此，有理由把置信区间$[-3\sigma, 3\sigma]$作为单次测量随机误差可能出现的界限。此时的可靠性，即置信概率为 99.73%。对于这个置信区间，即置信概率为 0.997 3 所对应的3σ，一般称为测量的极限误差。即

$$\Delta = 3\sigma \tag{2-68}$$

此时对应的显著度$\alpha=0.002\ 7$被认为可以忽略。此极限误差可视为随机误差有界性中的界限。

在有些文献中也有将2.58σ或1.96σ作为测量的极限误差，此时对应的显著度分别为 0.01 和 0.05，即在这些文献中，将显著度 0.01 或 0.05 被认为可以忽略。无论什么情况，在给出随机误差的极限误差时，必须标明$K\sigma$，必要时还须标明对应的显著度。

【例 2-18】 已知测量的标准偏差$\sigma=0.12$，求测量的极限误差。

解：由式(2-52)知，测量的极限误差为

$$\Delta=3\sigma=3\times0.12=0.36$$

三、算术平均值的极限误差

已知单次测量的标准偏差为s，由式(2-58)知，n次测量结果的算术平均值$\bar{x}$的标准偏差$s(\bar{x})=s/\sqrt{n}$。因此，算术平均值$\bar{x}$的不确定度表示为

$$ks(\bar{x}) = k\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{2-69}$$

算术平均值$\bar{x}$的极限误差为

$$\Delta_{\bar{x}} = 3s(\bar{x}) = 3\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{2-70}$$

【例 2-19】 对某量等精度测量 5 次得：$x_1=29.18$，$x_2=29.24$，$x_3=29.27$，$x_4=29.25$和$x_5=29.26$。求(a)它们的算术平均值；(b)$\alpha=0.01$时的极限误差；(c)$k=3$时的极限误差

解：(a)算术平均值：

$$\bar{x}=\frac{29.18+29.24+29.27+29.25+29.26}{5}$$

$$=29.240$$

残余误差$v_i=-0.06, 0.00, 0.03, 0.01, 0.02$；标准偏差$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}=0.035$。

(b)$\alpha=0.01$，此时置信因子 $t_{99}(4)=4.604$，由式(2-69)知算术平均值的极限误差

$$\Delta_{\bar{x}}=k\frac{s}{\sqrt{n}}=4.604\times\frac{0.035}{\sqrt{5}}=0.072$$

被测量值表达式为

$$29.240\pm0.072\quad(p=99\%)$$

(c)由式(2-70)知极限误差

$$\Delta_{\bar{x}}=\frac{3s}{\sqrt{n}}=\frac{3\times0.035}{\sqrt{5}}=0.047$$

被测量值表达为

$$X=\bar{x}\pm\Delta_{\bar{x}}=29.240\pm0.047$$

习题二

2-1 叙述随机误差的含义和特点。

2-2 为什么说正态分布是随机误差最基本的、主要的分布？它的函数式及其数字特征是什么？有哪些特点？

2-3 为什么用算术平均值作为测量结果的最佳值？

2-4 比较真误差与残余误差的概念。

2-5 单次测量标准差、算术平均值标准差的物理意义是什么？它们之间的关系如何？

2-6 最佳测量次数如何掌握？为什么？

2-7 比较贝塞尔公式、极差法和最大误差法的优缺点。

2-8 叙述置信概率、显著性水平和置信区间的含义及相互之间的关系。

2-9 对某量进行10次等精度测量，测量结果如下：

10.60，10.54，10.72，10.51，10.65，10.69，10.55，10.63，10.55，10.53

求最佳估计值和算术平均值标准差。

2-10 对某量进行6次等精度测量，结果如下：33.3，32.7，32.4，33.5，33.1，33.0。

(1) 用计算器应用贝塞尔公式计算单次测量的标准偏差。

(2) 求 s 的标准偏差。

2-11 对某量等精度测量12次，得算术平均值 $\bar{x}=35.341$，其单次测量的标准值差为 $s=0.003$，取 $\alpha=0.01$ 和 $\alpha=0.05$ 时，用 t 分布求算术平均值及其极限误差。

第3章 系统误差

第一节 概述

在第二章里我们详细讨论了随机误差的处理方法，对于随机误差所采用的概率统计处理方法，是在完全排除了系统误差的前提条件下进行的，即认为测量值中不含有系统误差或系统误差对测量结果的影响小到可以忽略不计的情况下进行的。但是，在实际测量过程中，不仅仅存在随机误差，同时还存在着系统误差，且系统误差的量值通常要比随机误差大一个数量级，并不易发现。可以这样说，对测量结果准确度的影响，不仅仅取决于随机误差的大小，更主要取决于系统误差的大小。这一点通过对系统误差有关内容的学习，将会得到进一步的认识。除此之外，通过研究系统误差还有可能会使所进行的科学研究有新的发现和突破。例如，1893 年科学家雷莱(Roylegh)利用化学方法制氮和从大气中提取氮气，结果发现 1L 以化学方法制取的氮气比 1L 从空气中提取的氮气轻 6mg，后来经对这一系统误差仔细分析研究，发现这一误差不是测量本身所致，而是因大气中含有惰性气体所致，从而导致了科学家们发现惰性气体的存在。因此，深入研究系统误差的规律和处理方法，对于提高测量准确度和推动科学技术的发展具有重要的意义，也是每一个测量工作者必备的误差理论内容之一。

一、系统误差的定义

所谓系统误差是指在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测量的真值之差。

系统误差的典型特征是具有确定规律性，也就是说这种误差可以归结为某一因素或几个因素的函数，这种函数关系通常情况下可以用解析公式、

曲线和图表来给出。就理论上而言，系统误差的这种确定变化规律是可确知的(实际上如真值一样，系统误差及其原因不可能完全获知)，也就是说，系统误差的大小、符号在整个测量过程中是可确知的。例如，在计量检定中，标准器的标准值存在误差，当向下一级传递时，该误差遵守固定不变这一规律，所以这种误差在传递时是系统误差。又如在力学和长度计量检定时，规定的标准温度为 20℃，但实际上由于各种原因，使被测件的温度和标准件的温度与标准温度有较大偏差。另外，由于被测件与标准件材料不同，膨胀系数有差异，这些都要引起测量误差。由于温度偏差所引起的测量误差可用如下公式表示：

$$\epsilon = L[\alpha_1(t_1 - 20) - \alpha_2(t_2 - 20)] \tag{3-1}$$

式中：　L——被测件的长度；

α_1，α_2——被测件与标准器的线膨胀系数；

t_1，t_2——被测件和标准器的实际温度。

由于温度偏差所引起的测量误差可由上式准确求知，则属系统误差。

二、系统误差的来源

系统误差由固定不变或按确定规律变化的因素所造成，这些误差因素从理论上说是可以掌握的，但在实际测量过程中由于产生系统误差的因素很多且很复杂，往往不可能全部找出。产生系统误差的原因可大致归结为如下几个方面：

1. 测量装置方面的原因

由于科学技术水平和制造加工能力的限制，使得测量仪器或装置自身存在设计制造缺陷而造成固有误差。这种固有误差在测量过程中呈现固定性或确定规律性，从误差特性区分当属系统误差。例如仪器的标尺刻度误差，圆刻度盘与指针安装偏心所引起的误差，天平的不等臂性所致误差等均属此类。测量装置的误差通常用允许误差、准确度、稳定度和灵敏度等技术指标来描述。

2. 环境方面的原因

测量仪器或装置的准确度是在规定的测量条件下给出的，当测量时的实际环境条件不能满足规定的测量条件时，将使测量结果产生附加误差。这种附加误差具有确定的规律性，属系统误差。例如测量时的实际温度、湿度、大气压力等不符合使用该测量仪器所规定的标准温度(如 20℃)、相对湿度(80%)和标准大气压力等所引起的误差均属此类。

环境因素存在于测量系统之外，但对测量系统会直接或间接发生作用

而使测量结果产生附加误差，附加误差是测量中不可避免的。为了减小或消除附加误差，测量仪器的铭牌或说明书上都给出了仪器规定的使用条件，有些仪表还给出了因环境条件不能满足规定条件时的修正公式，以便参照使用。

3. 测量方法的原因

由于测量方法的缺陷，导致产生系统误差的原因包括采用近似测量方法和近似计算两个方面。近似测量方法是由于测量时所采用的方法不完善，所依据的理论不严密，对某些理论尚未掌握清楚以及对被测量对象的有关知识研究得不够充分等，从而导致测量产生误差。这类误差产生在测量过程之中。近似计算包括：计算采用近似公式（如级数展开公式）计算过程中根据准确度需要采用近似数学常数（如 $\pi=3.14159\cdots$，$\sqrt{2}=1.41421\cdots$）和物理常数（如密度、粘度和热膨胀系数等）以及有效数字化整三个方面。近似计算所致的系统误差产生在测量数据处理过程中。

4. 测量者自身因素

由于测量者自身的生理特点，如眼睛的分辨能力、视差和反应速度等，测量时估读值始终偏大或偏小，动态测量时，记录某一信号总是超前或滞后等面导入系统误差。

介绍系统误差的产生原因，我们不仅要认识到在测量过程之中系统误差的普遍存在性，更重要的是可根据系统误差产生的原因，指导改进测量方法，以达到减弱或消除系统误差，提高测量准确度的目的。

三、系统误差的主要特征

通过对系统误差的定义和系统误差产生原因的学习可以看出：若对某一物理量进行测量，测量系统和测量条件一经确定，系统误差就获得了一个客观上的恒定值。也就是说，引起系统误差的原因在对该量测量之前就已经产生，而在整个测量过程之中始终存在，并呈现确定的规律性，多次测量也不能减弱它的影响。由此可把系统误差的主要特征归结如下：系统误差产生在测量之前、具有确定性；多次测量不能减弱和消除它即不具有抵偿性。

四、系统误差的分类

系统误差的产生原因与诸多因素有关，其表现形式也多种多样。按误差出现的规律可分为恒定系统误差和变值系统误差两类。按对误差掌握的程度，系统误差又可分为已定系统误差和未定系统误差两类。

(一) 恒定系统误差

恒定系统误差是指在整个测量过程之中，误差的大小和符号始终保持不变的系统误差。恒定系统误差随测量时间的变化为一常量。如图 3-1 所示。

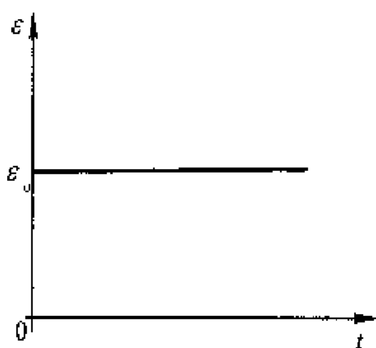


图 3-1

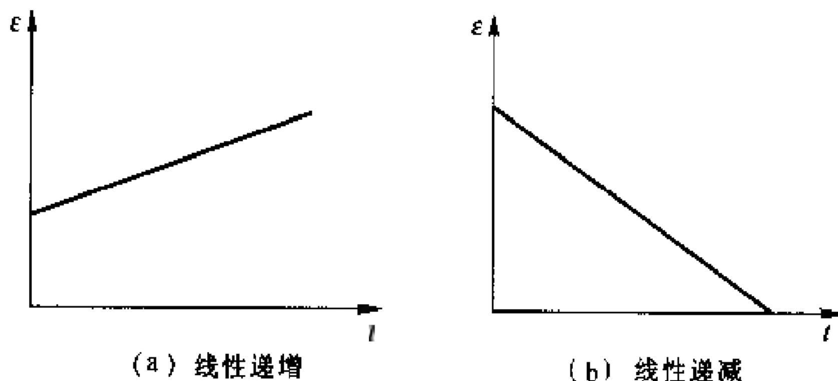
例如，压力表和测长仪等需要调整零位的测量仪器，由于零位没有调准，使用时引起的零位误差，测量人员的视差，标准仪器误差相对被检仪器误差的影响等均属恒定系统误差。

(二) 变值系统误差

变值系统误差是指在整个测量过程之中，误差的大小和符号按某一确定规律变化的系统误差。变值系统误差按其变化规律可分为线性系统误差、周期性系统误差和复杂规律变化的系统误差三类。

1. 线性系统误差

线性系统误差是指在整个测量过程之中，误差的大小随时间或其他有关因素的变化而线性地递增或线性地递减的系统误差。如图 3-2 所示。



(a) 线性递增　　(b) 线性递减

图 3-2

当测量仪器的量程小于被测量时，需用多次测量才能测得被测量。例如，在质量测量中，经常使用以小称多的测量方法。有一支秤量为 1kg 的杆秤，存在制造误差 ε_m，用它来称量某物的质量为 M_0，若累积称量读数值为 M，则被测物的实际质量为

$$M_0 = M(1+\varepsilon_m) \tag{3-2}$$

若认为该物体质量为 M，就产生了随测量值大小而变化的线性系统误差 $-M\cdot\varepsilon_m$。

在长度计量中，也常会遇到此类问题。如在检定标尺时，由于检定温度偏离标准温度 20℃而引起的测量误差是随被测长度而变化的线性系统误差。

2. 周期性系统误差

在整个测量过程之中，误差的大小和符号随时间或有关因素的变化而呈周期性变化的系统误差，称作周期性系统误差。

例如，圆盘指针指示型仪表(压力表、测角仪等)，由于仪表装配问题，指针回转中心与表盘中心存在偏心距 e，在整个测量过程之中将会出现周期性变化的指示误差。如图 3-3 所示，当指针处于 0°时，指示无偏差，顺时针转动至 90°时，指示误差为 $+e$，旋转至 180°时。指示误差下降为 0，当指针旋转至 270°处，指示误差由 0 变化为 $-e$，指针旋转一周至 360°时，指示误差由 $-e$ 变化为 0。这样指针每转动一周，示值误差便按 0，$+e$，0，$-e$，0 的规律呈现出周期性变化。这种周期性变化实质上服从正弦函数关系，可表示如下：

$$\varepsilon = e\sin\phi$$

式中：ε——示值误差；

e——指针回转中心与表盘中心的偏心距；

ϕ——指针与水平线的夹角。

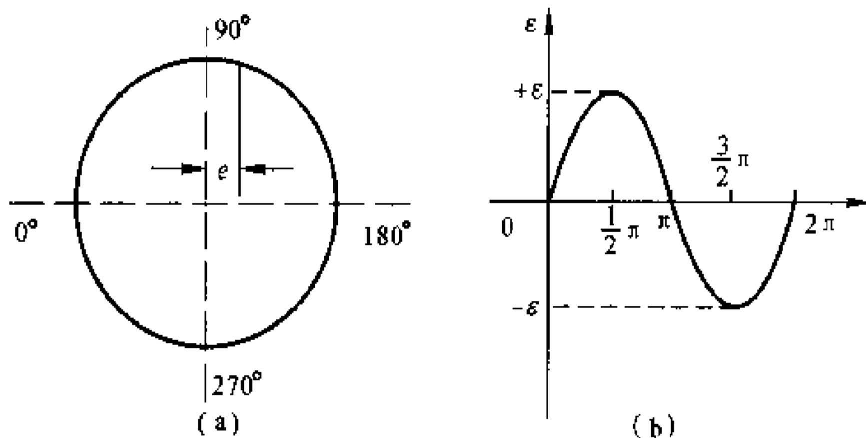


图 3-3

3. 复杂规律变化的系统误差

除上述三种具有典型变化规律的系统误差外，服从其他变化规律的系统误差统称为复杂规律的系统误差。这类误差在整个测量过程中具有确定规律，但比较复杂，有时甚至只能从经验公式或实验曲线来描述其变化规律。

如对于刻度盘或标尺的刻度误差，就全量程而言，属复杂规律性的系

统误差。因为虽然对各刻度点的误差的大小和符号是确定的，但对整个量程的误差变化规律只能用实验曲线表出，属复杂变化规律。

（三）已定系统误差

在整个测量过程之中，误差的大小和符号为已知。引起这类系统误差的因素已经确切掌握，对测量结果的影响一般可利用加修正值的方法予以修正。

（四）未定系统误差

在整个测量过程之中，误差的大小或符号未知。影响这类误差的因素不容易掌握，误差变化呈现的规律虽有确定性，但很复杂，要想找到它往往要付出人力、物力和财力的极大代价，而通常又无此必要。但对这类误差总可估计出误差的变化区间$(-e, e)$，即误差一般不会超过极限值e，则e称为系统误差限，又称系统效应引起的测量不确定度。

例如，在电学测量中，常遇到一些误差，其大小固定，但当电流相位反相后其符号将变更，而且在一定时间内电流相位固定但不确知。因此它属未定系统误差。

又如，在水流量标准装置中，换向器时间测定的误差的大小固定，如为100ms，但符号不定。当换向器向右换向时为+100 ms，而当换向器向左换向时为−100 ms，测量时换向器向左向右都可能，因此它也是未定系统误差。

第二节　系统误差对测量结果的影响

在讨论系统误差的处理方法之前，首先分析一下系统误差对测量结果的影响，以便为更好地研究系统误差的处理方法打下基础。恒定系统误差和变值系统误差对测量结果的影响是不同的，这里分别予以讨论。

一、恒定系统误差对测量结果的影响

设对真值为X_0的某物理量等精密度重复测量n次，得到测得值x_1，x_2，…，x_n，若测得值同时含有恒定系统误差ε和随机误差δ_i。我们知道，恒定系统误差对每个测得值的影响相同，则有

$$\begin{aligned} x_1 &= X_0+\varepsilon+\delta_1 \\ x_2 &= X_0+\varepsilon+\delta_2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3-3}$$

$$x_n = X_0 + \varepsilon + \delta_n$$

将方程组两边相加取平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\left(nX_0 + n\varepsilon + \sum_{i=1}^{n}\delta_i\right) = X_0 + \varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

则测量算术平均值为

$$\bar{x} = X_0 + \varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \tag{3-4}$$

由式(3-4)可看出：测量算术平均值包括恒定系统误差，或者说恒定系统误差影响测量的算术平均值。

再看测量结果中的残余误差 v_i

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 - \bar{x} \\ &= (X_0 + \varepsilon + \delta_1) - \left(X_0 + \varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right) \\ &= \delta_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \end{aligned} \tag{3-5}$$

当测量次数足够多，即 $n\to\infty$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i = 0$$

则得到

$$v_1 = \delta_1$$

同理可得

$$v_2 = \delta_2$$

$$\vdots$$

$$v_n = \delta_n$$

由此可见，残余误差 v_i 中不含有恒定系统误差，即恒定系统误差不影响随机误差的标准偏差 s 的计算，或者说恒定系统误差不影响随机误差的分布规律。

结论：恒定系统误差以大小和符号固定的形式存在于每个测量值和算术平均值中。它仅影响测量的算术平均值，并不影响其随机误差的分布规律及其分布范围。

二、变值系统误差对测量结果的影响

设对真值为 X_0 的某物理量等精密度测量 n 次，得到测得值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，若测得值同时含变值系统误差 ε_i 和随机误差 δ_i。由于变值系统误差对每一个测得值的影响是不同的，则有

$$
\begin{aligned}
x_1 &= X_0 + \varepsilon_1 + \delta_1 \\
x_2 &= X_0 + \varepsilon_2 + \delta_2 \\
&\vdots \\
x_n &= X_0 + \varepsilon_n + \delta_n
\end{aligned}
\tag{3-6}
$$

求测量算术平均值为

$$
\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = X_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \tag{3-7}
$$

由此可见，测量的算术平均值包括变值系统误差，即变值系统误差对算术平均值有影响。

再求残余误差

$$
\begin{aligned}
v_1 &= x_1 - \bar{x} \\
&= X_0 + \varepsilon_1 + \delta_1 - \left(X_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right) \\
&= \varepsilon_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i + \delta_1 \\
&\overset{n\to\infty}{=} \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon} + \delta_1
\end{aligned}
\tag{3-8}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon} + \delta_2 \\
&\vdots \\
v_n &= \varepsilon_n - \bar{\varepsilon} + \delta_n
\end{aligned}
\tag{3-9}
$$

此式说明，残余误差包括变值系统误差，即变值系统误差影响标准偏差 s 的计算，改变其随机误差的分布规律及其分布范围。

结论：变值系统误差不仅影响其测量的算术平均值，而且改变其随机误差的分布规律和分布范围。

第三节　系统误差的发现方法

如何发现测量中的系统误差，是分析和处理系统误差的首要问题。只有将产生系统误差的因素全部找出，才测采取相应的措施消除或减弱系统误差对测量结果的影响。由于在各测量中产生系统误差的因素是多方面的，也很复杂，所以人们还难于查明产生系统误差的全部因素。即还不能把所有的系统误差找出来，更不可能找出一套适用于所有系统误差的通用发现方法。但对于测量中存在的某些较显著的系统误差，可以通过一些检验方法或手段发现它。

一、实验对比检定法

实验对比检定法是通过改变产生系统误差的条件(通常是改用更高准确度的仪器或基准),在不同条件下进行检定性测量,通过比较来发现定值系统误差。

定值系统误差对测量结果的影响,仅限于测量算术平均值,而对于残余误差和标准差无影响。因此,在同一条件下多次测量不能发现定值系统误差。要判断某一测量条件下是否存在定值系统误差,可用更高准确度的标准仪器进行检定性测量,以此两种不同的测量条件对同一量值进行次数相同的重复测量,求出两者算术平均值之差、则此差值即为被判断的测量条件下的定值系统误差。

例如,用千分尺重复测量名义值为 $\Phi=20\text{mm}$ 的轴 n 次,测得值的算术平均值 $\bar{x}=20.010\text{mm}$。另用准确度更高的标准量块在测微仪上测量该轴 n 次,得算术平均值 $\overline{X}_0=20.005\text{mm}$,并视为被测轴直径的约定真值,则用千分尺测量存在的定值系统误差为

$$\Delta=20.101-20.005=+0.005\text{mm}$$

在计量量值传递中,高一等标准仪器对低一等(标准)仪器的计量检定,实质上其目的就是利用约定真值的概念找出低一等(标准)仪器的定值系统误差。

例如:砝码按标称值使用时,在测量结果中就存在由于砝码质量固有误差而产生的定值系统误差,找出这一误差的最佳方法,就是用相应的高一等标准砝码按照计量检定规程对其进行计量检定确定它。

实验对比检定法是发现并确定定值系统误差最有效、最实用和最常用的方法。

二、残余误差观察法

残余误差观察法是判别发现变值系统误差的一种直观、便捷和常用的方法。

变值系统误差不仅对测量的算术平均值有影响,而且对残余误差 v_i 和标准差 s 也有影响。因此可根据测量的残余误差和误差的分布规律来检验判别测量中是否存在变值系统误差。

残余误差观察法是根据测量列的各个残余误差的大小和符号的变化规律,直接由误差数据或误差曲线图形来判断有无系统误差,这种方法主要适用于有规律变化的变值系统误差。

设对某量在同一条件下多次重复测量 n 次,得测量列 x_1, x_2, …, x_n,

计算算术平均值和残余误差。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x$$

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

根据测量先后顺序，将测量列的残余误差列表或作图进行观察：

(1) 若残余误差 v_i 大体上正负相同，且无明显变化规律(图 3-4a)则可认为测量列中不存在系统误差。

(2) 若残余误差 v_i 按近似的线性规律递增或递减(图 3-4b)，则可判断测量结果列中存在线性系统误差。

(3) 若残余误差 v_i 的正负号有规律的循环交替变化，则可判断测量列中存在周期性变化的系统误差(图 3-4c)。如果中间有微小波动，则说明随机误差的影响。

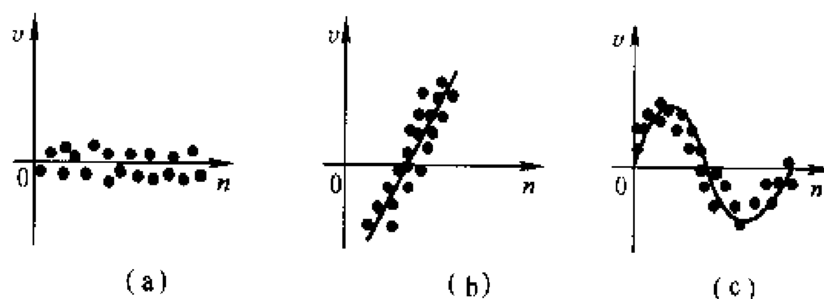


图 3-4

【例 3-1】 对某一物体长度测量 10 次，测得数据并计算残余误差，如表 3-1 所示。

表 3-1

测量顺序	测得值 x_i/m	残余误差 v_i/m
1	10.556	−0.006
2	10.557	−0.005
3	10.556	−0.006
4	10.558	−0.004
5	10.560	−0.002
6	10.562	0.000
7	10.564	0.002
8	10.568	0.006
9	10.568	0.006
10	10.571	0.009
n=10	$\bar{l}$=10.562	

由表3-1可以看出，残余误差的大小明显地由小递增变大，则测量列中存在线性系统误差。

【例3-2】 测量一电感，所得测量列如下，(单位：mH)：50.74，50.76，50.82，50.85，50.83，50.74，50.75，50.81，50.85，50.85。用残余误差法检验此测量是否有系统误差。

解：计算算术平均值　$\overline{X}=50.80$

各次测量的残余误差为

-0.06，-0.04，$+0.02$，$+0.05$，$+0.03$，

-0.06，-0.05，$+0.01$，$+0.05$，$+0.05$。

根据残余误差列作 v_i-n 图，如图3-5所示，可看出存在周期性变化的系统误差。

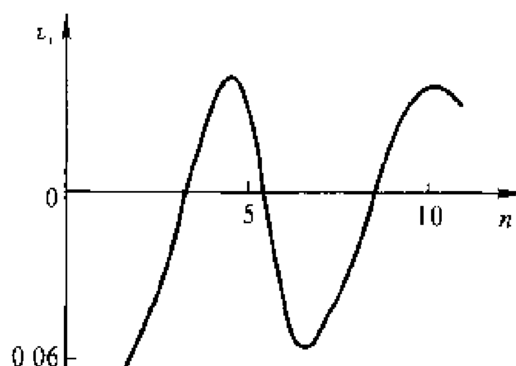


图3-5

三、马列科夫准则

马列科夫准则是发现线性系统误差比较有效的方法。其原理是按测量先后次序测量列前一半的残余误差求和与后一半测量列的残余误差和之差，如果显著不为零，则可认为测量列中含有线性规律变化的系统误差。

设对某量在同一条件下多次重复测量 n 次，将测量值依次排列为 x_1，x_2，…，x_n。计算算术平均值 $\bar{x}$ 和残余误差列 v_1，v_2，…，v_n，并将残余误差列前后均等分成两组，当 n 为偶数时取 $k=n/2$，当 n 为奇数时取 $k=(n+1)/2$，再分别计算出两组残余误差和 $\sum_{i=1}^{k}v_i$、$\sum_{j=k+1}^{n}v_j$ 以及差值 Δ：

$$\Delta=\sum_{i=1}^{k}v_i-\sum_{j=k+1}^{n}v_j \tag{3-10}$$

若差值显著不等于零时，则有理由认为该测量列中含有线性系统误差。该校核法又称残余误差校核法。

【例3-3】 用残余误差校核法判别例3-1测量数据中是否存在线性系统误差。此时 $n=10$，$k=5$。

解：

$$\Delta=\sum_{i=1}^{k}v_i-\sum_{j=k+1}^{n}v_j$$
$$=(-0.006-0.005-0.006-0.004-0.002)-(0.00+0.002+0.006+0.006-0.009)$$
$$=0.046$$

差值 Δ 显著不为零，说明测量列中含有线性系统误差。

使用该检验方法时必须注意，即使差值 Δ 近似等于零，测量列中也还有可能存在系统误差。

四、计算数据比较法

对同一量进行多组测量，得到多组测量数据，通过计算数据比较，判断是否满足随机误差条件，以发现系统误差。

设对同一量独立测量得 m 组结果如下：

$$\begin{array}{ll} x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n} & \overline{x_1},\ s_1 \\ x_{21},\ x_{22},\ \cdots,\ x_{2n} & \overline{x_2},\ s_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{m1},\ x_{m2},\ \cdots,\ x_{mn} & \overline{x_n},\ s_m \end{array}$$

其中$\overline{x_1}$，$\overline{x_2}$，…，$\overline{x_m}$为每组的算术平均值，s_1，s_2，…，s_m 为每组算术平均值的标准差。

则任意两组测量结果$\overline{x_i}$与$\overline{x_j}$间不存在系统误差的标志是：

$$|\overline{x_i}-\overline{x_j}|<2\sqrt{s_i^2+s_j^2} \tag{3-11}$$

【例 3-4】 雷莱用不同方法制取氮，测得氮气相对密度平均值及其标准差分别为

由化学法制取氮　　$\overline{x_1}=2.299\ 71$　$s_1=0.000\ 41$

由大气中提取氮　　$\overline{x_2}=2.310\ 22$　$s_2=0.000\ 19$

两平均值之差　　$|\overline{x_2}-\overline{x_1}|=0.010\ 51$

其标准差　　$\sqrt{s_i^2+s_j^2}=\sqrt{0.000\ 41^2+0.000\ 19^2}=0.000\ 45$

$$2\sqrt{s_i^2+s_j^2}=2\times0.000\ 45=0.000\ 90$$

则　　$0.010\ 51>0.000\ 90$

故说明两种方法所得到的结果有系统误差存在。雷莱在分析并排除了由于操作技术引起的系统误差的可能性后，强调了两种方法存在的差别。从而导致科学家们进行深入的研究，后来终于发现了空气中存在惰性气体。

五、秩和检验法

对某一被测量，若独立测得两组数据

$$x_i \qquad i=1,2,\cdots,n_x$$

$$y_j \qquad j=1,2,\cdots,n_y$$

把两组测量数据混合后，按数值大小顺序重新排列，取测量次数较少的那一组数据，数出它们在混合列中的次序(即秩)，把得到的秩求和，即得到秩和 T。若

$$T_- < T < T_+ \tag{3-12}$$

则无根据怀疑两组测量数据间存在系统误差。

式中所用的界限值 T_- 和 T_+，可根据两组测量数据的个数 n_x、n_y，一般取 $n_x<n_y$。由秩和检验表 3-2 查得(显著性水平取 0.05)。

表 3-2

n_x	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
n_y	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5	6	7	8	9	10
T_-	3	3	4	4	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	11
T_+	11	13	14	16	18	20	21	15	17	20	22	24	27	29	31
n_x	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5		
n_y	4	5	6	7	8	9	10	5	6	7	8	9	10		
T_-	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	23	25	26		
T_+	24	27	30	33	36	39	42	35	40	43	47	50	54		
n_x	6	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	9	9	10
n_y	6	7	8	9	10	7	8	9	10	8	9	10	9	10	10
T_-	28	30	32	33	35	39	41	43	46	52	54	57	66	69	83
T_+	50	54	58	63	67	66	71	76	80	84	90	95	105	111	127

若 n_x 与 n_y 大于 10，则秩和 T 已近似服从正态分布

$$T \sim N\left(\frac{n_x(n_x+n_x+1)}{2},\sqrt{\frac{n_x n_y(n_x+n_y+1)}{12}}\right) \tag{3-13}$$

括号中第一项为数学期望 μ，第二项为标准差，此时界限值 T_- 和 T_+ 可由正态分布的 $\mu-2s\mu+2s$ 算出(显著性水平取 0.05)。

【例 3-5】 对某量独立测量得到两组数据如下，用秩和检验法判别两组数据间有无系统误差。

x_i　　20.3，20.5，21.0，21.2，21.4

y_j　　20.4，20.6，21.1，21.3

解：将两组数据混合排列成表 3-3。

表 3-3

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	20.3		20.5		21.0		21.2		21.4
y_j		20.4		20.6		21.1		21.3	

已知　　$n_1=5$　　$n_2=4$

计算秩和　　　　$T=2+4+6+8=20$

查表 3-2 得　　　　$T_-=13$　　$T_+=27$

因　　　　$T_-=13<T=20<T_+=27$

故无根据怀疑两组数据间存在系统误差。

六、t 检验法

对某一被测量，若独立测得的两组数据均服从正态分布，可用 t 检验法检验两组数据间是否存在系统误差。其检验的步骤和确定的依据如下。

若独立测得两组数据为

$$x_i \quad i=1,2,\cdots,n_x$$

$$y_j \quad j=1,2,\cdots,n_y$$

且它们服从正态分布，根据两组数据计算：

$$\bar{x}=\frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x}x_i$$

$$\bar{y}=\frac{1}{n_y}\sum_{j=1}^{n_y}y_j$$

$$s_x^2=\frac{1}{n_x-1}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2$$

$$s_y^2=\frac{1}{n_y-1}\sum_{j=1}^{n_y}(y_j-\bar{y})^2$$

则

$$t=(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\frac{n_x n_y(n_x+n_y-2)}{(n_x+n_y)[(n_x-1)s_x^2+(n_y-1)s_y^2]}} \tag{3-14}$$

为服从自由度 $\nu=n_x+n_y-2$ 的 t 分布变量，取显著度 α，由 t 分布表（附表1）查 $p(|t_t|>t_\alpha)=\alpha$ 中 t_α 与实测数据计算 t 值比较，若满足 $|t|<t_\alpha$，则无根据怀疑两组数据间存在系统误差。

【例 3-6】 对某量测得两组数据

x_i 10.2, 10.6, 10.3, 10.9, 11.0, 11.1, 10.8

y_j 9.8, 10.0, 11.4, 10.8, 11.2, 10.4

用 t 分布检验法判别两组数据间是否存在系统误差。

解：

$$\bar{x}=\frac{1}{7}\sum x_i = 10.7$$

$$\bar{y}=\frac{1}{6}\sum y_j = 10.6$$

$$s_x^2=\frac{1}{6}\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0.12$$

$$s_y^2=\frac{1}{5}\sum (y_j - \bar{y})^2 = 0.42$$

$$t=(10.7-10.6)\times\sqrt{\frac{7\times6\times(7+6-2)}{(7+6)\times(6\times0.12+5\times0.42)}}=0.36$$

由 $\nu=7+6-2=11$ 及取 $\alpha=0.05$，查 t 分布表(附表 1)得 $t_\alpha=2.20$

比较 $|t|=0.36<t_\alpha=2.20$

故无根据怀疑两组测量数据间存在系统误差。

由于产生系统误差的原因很复杂，影响系统误差的因素也是多方面的，故系统误差的发现方法也较多，除以上介绍的几种常用方法外，在实际测量中还可有一些其他发现方法，这里不再详述。

上述发现方法中，各具有不同的特点，但都有一定的局限性。实验对比检定法是发现并确定定值系统误差最有效、最实用和最常用的方法，也是发现其他系统误差的有效方法。但由于这种方法需要相应的更高准确度测量仪器和更好的测量条件，因而其应用受到限制。残余误差观察法是发现组内系统误差的有效方法，一般情况下皆可应用，但它发现不了定值系统误差。残余误差校核法、两贝－赫尔默准则、计算数据比较法、秩和检验法和 t 检验法都是在一定的条件下针对某一种系统误差存在判别才有效，反之则不一定。更不能告诉我们系统误差产生的原因和具体的量值大小，它只能给测量者提供一个可能存在某种系统误差的信息。尽管如此，系统误差发现方法的研究将有助于系统误差的减弱和消除。

第四节 系统误差的一般处理方法

系统误差虽有确定规律，但却不比“无规律的随机误差”更易分析处理。对任一次测量值来说，随机误差毫无规律，但在多次测量结果中却服从统计规律。因此，对随机误差可用概率统计的理论方法进行处理。系统误差

虽有规律，但这种确定规律与测量时的测量装置、测量条件和测量方法紧密联系，种类繁多，再加之人们对系统误差的研究还很不充分，所以对系统误差的处理，还没有统一的理论和象对随机误差那样可以通用的处理方法，只能针对具体的测量情况，采用相应的测试技术措施来减弱或消除它对测量结果的影响。由此可知，对系统误差处理的得当与否主要是技术。它取决于测量者的经验、知识和技能。

对于系统误差处理方法的研究，已日益受到人们的重视。可以预见，随着对系统误差的研究逐渐深入，处理方法将会得到完善，进而推动测试技术的进一步发展。

一、消除系统误差的措施

在测量过程中，若发现存在系统误差，为了减弱或消除它对测量结果的影响，处理措施可从如下几个方面考虑。

1. 从产生误差根源上消除系统误差

用排除误差源的方法消除系统误差是最理想的方法。测量者在进行测量之前，对所采用的测量装置、测量方法、现场测置环境条件等诸方面分别进行仔细的分析和研究，尽可能找出产生系统误差的因素，并采取相应的技术措施。将系统误差从产生的根源上加以消除或减弱到可忽略的程度。例如，在测量之前检查所使用的测量仪器是否经过检定并具有有效检定周期的检定证书，若有效期已过，应重新检定；对需要调整零位的测量仪器，检查其是否已准确调整到零位等。

2. 利用加修正值的方法消除系统误差

对于某些事先通过分析或实验可以确知误差的大小和方向的恒定系统误差，可以利用对测量结果加修正值的方法来减弱或消除系统误差对测量结果的影响。

修正值是这样的一个值：它的大小与定值系统误差的值相等但符号相反。

为了求得修正值，最常用的方法是对所使用的测量器具进行检定，确定该测量器具的示值相对计量标准器的差异，然后将这一数值给予相反的符号。

例如，标称质量为1kg的标准砝码，它的实际质量并不正好等于1kg，而是有一个系统误差ε存在。若按标称质量使用，将对测量值产生ε的恒定系统误差。为了消除这一误差，我们可对标准砝码用高一等标准砝码在天平上进行检定，确定示值误差的大小ε。然后将ε异号，即为标准砝码标称

质量的修正值。使用标准砝码进行质量测量时，其测量结果应为标称值1kg与修正值$-\varepsilon$的总和，即

$$m=[1+(-\varepsilon)]\text{kg}$$

这样处理后，在测量结果中不再含有恒定系统误差ε的影响。

3. 选择适当的测量方法消除系统误差

在测量过程中，根据系统误差的性质，果取一定的技术措施，选择适当的测量方法，使测得值中的系统误差在测量过程中相互抵消而不带入测量结果之中，从而实现减弱或消除系统误差的目的。几种消除系统误差的典型方法将在后续部分介绍。

二、恒定系统误差的减弱和消除方法

对于通过分析和实验可以确知其大小和方向的恒定系统误差，可以采用加修正值的方法消除其影响。而对那些不易确定大小的恒定系统误差，或采用加修正值方法比较繁琐的恒定系统误差，可采用适当的测量方法，使系统误差在测量过程中予以消除。

常用的消除方法有：

1. 替代测量法

在测量装置上对被测量进行测量后，不改变测量条件，立即用一同性质的已知标准量代替被测量进行同样的测量，并使测量仪器的指示保持不变，用替代的标准量作为被测量的测量结果。这样，就使得测量中存在的恒定系统误差消除在测量过程之中。

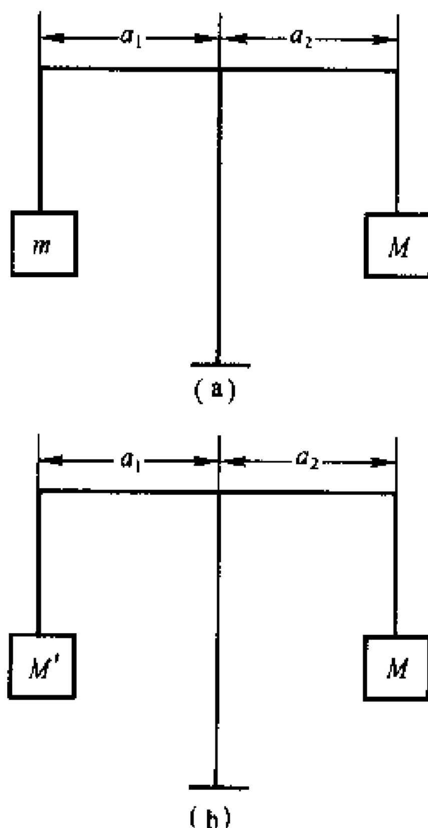


图 3-6

【例 3-7】 应用替代法消除恒定系统误差最典型的例于是利用精密天平称量物体的质量，如图3-6所示。设被测质量为m，天平两臂长分别为a_1和a_2，当天平达到平衡时所加标准砝码质量为M。根据力矩平衡原理有：

$$m=\frac{a_2}{a_1}M \tag{3-15}$$

由于天平制造加工误差的存在，两臂长a_1和a_2不可能绝对相等(即$a_1\neq a_2$)，若用M来作为被测物体的质量，则存

在臂长不等带来的恒定系统误差。为了消除这一误差可用替代测量法，具体方法如下：

将被测质量 m 与标准砝码 M 平衡，则有

$$m=\frac{a_2}{a_1}M$$

然后用质量为 M' 的标准砝码替代被测质量 m，使天平重新平衡，则有

$$M'\cdot a_1=M\cdot a_2 \tag{3-16}$$

$$M'=\frac{a_2}{a_1}M$$

所以

$$m=M' \tag{3-17}$$

这样就消除了由于天平不等臂性所致的恒定系统误差。

【例 3-8】 替代测量法在电学计量中也有应用。例如，在电桥上测量电阻就是采用替代测量法，测量原理示重图如图 3-7 所示。当电桥的两侧端口 A、B 接入被测量电阻 R_x 时，调节其他各臂电阻之值，使电桥平衡，有

$$R_x=\frac{R_1R_3}{R_2} \tag{3-18}$$

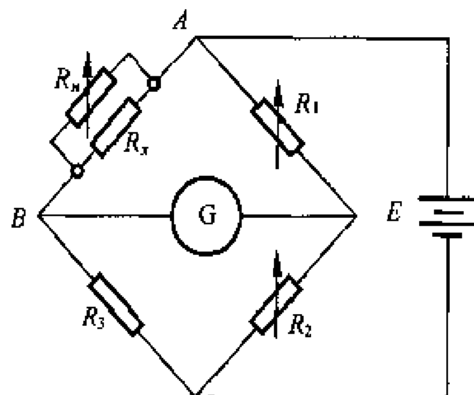


图 3-7

此时 R_x 的值受各桥臂电阻自身的恒定系统误差 ε_1，ε_2，ε_3 的影响，而使被测电阻 R_x 产生 ε_x 的误差。其误差间的关系可用如下关系式表示：

$$\frac{\varepsilon_x}{R_x}=\frac{\varepsilon_1}{R_1}-\frac{\varepsilon_2}{R_3}+\frac{\varepsilon_4}{R_4} \tag{3-19}$$

保持各可调元件不动，在 A，B 处用标准可调电阻 R_n 替代被测电阻 R_x，调节其阻值大小，使电桥重新平衡，于是可得

$$R_n=\frac{R_1R_3}{R_2} \tag{3-20}$$

所以

$$R_x=R_n \tag{3-21}$$

这样，在测量结果中，就消除了各臂桥阻的误差的影响。该测量方法要求检流计 G 有足够高的灵敏度和各电阻在替代过程中保持稳定不变。

替代测量法在长度计量等方面也常被采用。

2. 异号测量法

异号测量法是对被测量进行一次测量后，改变测量中的某些条件(如测量方向、电压极性等)，进行再次测量，使得两种条件下的测量结果中出现的恒定系统误差的大小相等，符号相反，取两次测量值的平均值作为测量结果，即

$$\frac{(X_0+\varepsilon)+(X_0-\varepsilon)}{2}=X_0 \tag{3-22}$$

式中：$X_0+\varepsilon$——第一次测量值；

$X_0-\varepsilon$——第二次测量值。

使恒定系统误差在测量过程中相互抵消。

异号测量法是消除恒定系统误差的又一有效方法。当已知某种产生恒定系统误差的因素，而又无法从产生根源消除且难以确定其大小时，通常可考虑采用异号测量法。

【例 3-9】 在长度计量仪器中，测微仪有空行程，即螺旋旋转时，刻度变化但测量杆不动，从而给测量带来恒定系统误差。为了消除这一系统误差，可以采用两个方向对线的异号测量法。第一次顺时针对准标志读数 x_1，若设不含系统误差的正确该数为 X_0，空行程引起的恒定系统误差为 ε，则有

$$x_1=X_0+\varepsilon \tag{3-23}$$

再逆时针方向旋转对准标志读数 x_2，则有

$$x_2=X_0-\varepsilon \tag{3-24}$$

取两次测量(读数)平均值

$$X_0=\frac{x_1+x_2}{2} \tag{3-25}$$

为测量结果，不再含有空行程引起的恒定系统误差。

【例 3-10】 在电学计量中，使用检流计进行电测量时，也常使用异号测量法。这是因为在电测量时，由于各部分温度不一致而出现热电流，致使检流计示值失真，见图 3-7，如果这些热电流具有固定的值，就会给测量结果带来恒定系统误差。为了消除这一系统误差的影响，可以先在给定的电流方向情况下读取检流计示值 I_1，设热电流引起的示值误差为 ε，检流计电路中有效工作电流所引起的示值为 I_0，则有

$$I_1=I_0+\varepsilon$$

再改变给定电流方向读取检流计示值为 I_2，此时检流计电路中有效工作电流所引起的示值为 $-I_0$，而热电流引起的示值误差 ε 不变，则有

$$I_2 = -I_0 + \varepsilon$$

取两次读数的差值

$$I_0 = \frac{I_1 - I_2}{2}$$

作为测量结果，这样就消除了热电流带来的恒定系统误差。

又如，用电流表测量弱电流时，如果怀疑周围的磁场可能对测量结果引入恒定系统误差，可以把电流表方向水平旋转180°再测量一次，取两次读数的平均值，可抵消外磁场引入的恒定系统误差。这种测量法实质上也是异号测量法。

3. 交换测量法

交换测量法就是把被测量与标准量的位置互换，进行两次测量，使产生恒定系统误差的因素对测量结果的影响起相反作用，从而达到消除恒定系统误差的目的。

【例 3-11】 用天平和砝码按高斯双重称量法测定质量就是交换测量法的具体运用。图 3-8 是高斯双重称量法的测量示意图。首先将被测质量 m 放在左盘，标准砝码 M 放在右盘，使之平衡，有

$$m \cdot a_1 = M \cdot a_2$$

$$m = \frac{a_2}{a_1}M \tag{3-26}$$

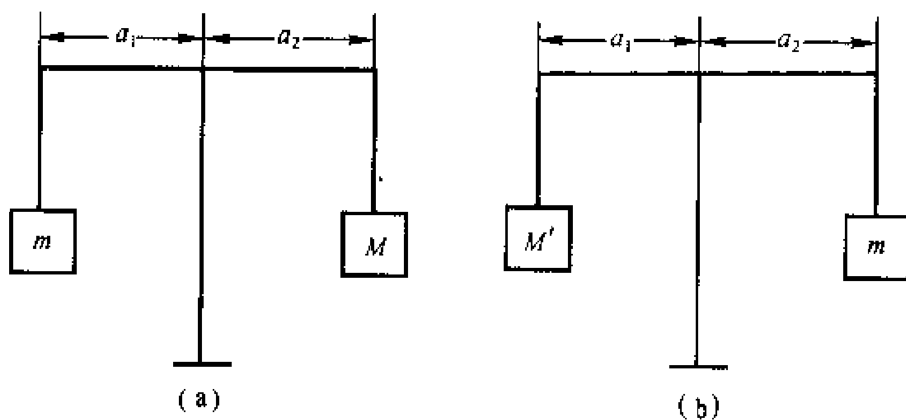


图 3-8

然后将被测质量和标准砝码左右位置互换，重新测量。由于天平两臂不相等，必须调整标准砝码的质量为 $M'=M+\Delta M$，使得天平重新平衡，则有

$$M' \cdot a_1 = m \cdot a_2$$

$$m = \frac{a_1}{a_2}M' \tag{3-27}$$

将式(3-26)和式(3-27)等式两边分别相乘，得

$$m = \sqrt{M \cdot M'} \tag{3-28}$$

以此作为测量结果，不再含有由于天平不等臂而产生的恒定系统误差。

长度计量中用标准线纹尺检定低一等级线纹尺时，如果其中任一个读数显微镜的光轴有微小倾斜，就会给测量结果带来恒定系统误差，因而在第一次测量后，再将标准尺与被检尺的位置相互交换进行第二次测量，取两次测得值的平均值作为测量结果。即可使测量中可能产生的恒定系统误差相互抵消。

在电测量中利用平衡电桥测量未知电阻值，为消除电桥比例臂电阻不等给测量结果带来的恒定系统误差，采用将被测电阻 R_x 与标准可变电阻 R_n 互换位置进行两次测量，取 $R_x=\sqrt{R_n \cdot R_n'}$ 为测量结果，即为交换测量法。

三、变值系统误差的减弱和消除方法

1. 线性系统误差消除法——对称测量法

对称测量法是减弱或消除线性系统误差的一种有效方法。如果测量过程中存在随时间或其他因素成线性规律变化的系统误差，如图 3-9 所示，可选定某一时刻点为中心，则与此时刻点对称的任何两个时刻的系统误差的平均值皆等于中点时刻的误差值，即

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_5}{2}=\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_4}{2}=\varepsilon_3 \tag{3-29}$$

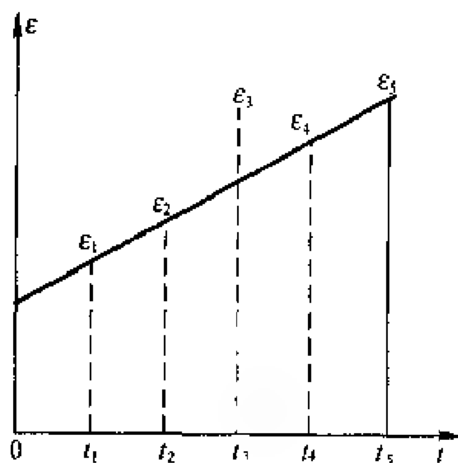


图 3-9

根据这种性质，可将测量程序对称安排(即为 ABCBA 程序)，取对称两点的两次测量值的平均值作为一个测量值，这样就把线性变化的系统误差转化为可修正的恒定系统误差。当选择中点的系统误差值为零时，测量结果中不存在系统误差，以此达到消除线性系统误差的目的。

【例 3-12】 在电学计量中，用电位计测量电动势时如图 3-10 所示，在电位计的工作电流回路中，蓄电池 E 的放电电流 I_0 随着放电时间而线性降

低，从而引起线性递减的系统误差。为了消除这一误差，测量时可采用对称测量法。具体步骤如下：

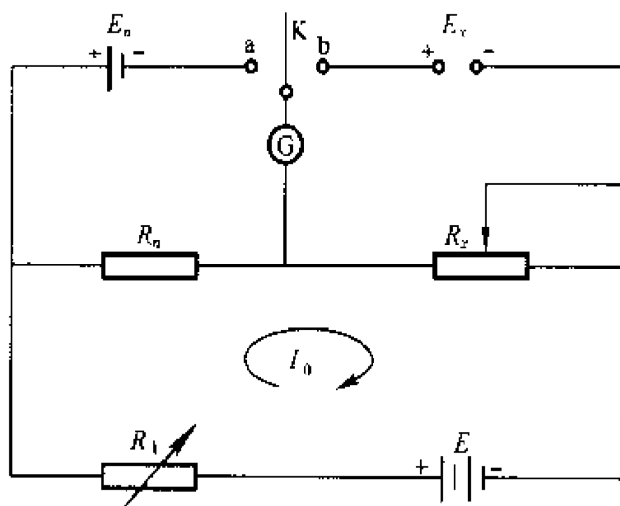


图 3-10

首先将开关 K 和 a 接通，调整电阻 R_1，平衡标准电池的电动势 E_n，此时检流计 G 上的电流为零。设电位计回路的工作电流为 $I_0+\Delta I_1$，则得

$$\frac{E_n}{R_n} = I_0 + \Delta I_1 \tag{3-30}$$

然后将 K 和 b 接通，用测量电阻 R_x 平衡被测量的电动势 E_x，假定工作电流保持不变，则有。

$$\frac{E_x}{R_x} = I_0 + \Delta I_1 \tag{3-31}$$

比较上面两式，可得

$$\frac{E_n}{R_n} = \frac{E_x}{R_x} \tag{3-32}$$

即

$$E_x = \frac{R_x}{R_n} E_n \tag{3-33}$$

然而，在实际测量中，蓄电池 E 的电压随放电时间而逐渐下降。设工作电流随时间成比例的减小到 $I_0+\Delta I_2$，即

$$\frac{E_x}{R_x} = I_0 + \Delta I_2 \tag{3-34}$$

为了消除由工作电流下降带来的线性系统误差，可将 K 与 a 再次接通，以 R_n'代替 R_n，再次重新平衡标准电池的电动势 E_n，这时工作电流变为 $I_0+\Delta I_3$，即有

$$\frac{E_n}{R_n'} = I_0 + \Delta I_3 \tag{3-35}$$

使任意两次测量的时间间隔相等，于是有

$$\frac{1}{2}(\Delta I_1+\Delta I_3)=\Delta I_2 \tag{3-36}$$

即
$$\frac{1}{2}E_n\left(\frac{1}{R_n}+\frac{1}{R_n'}\right)=\frac{E_x}{R_x} \tag{3-37}$$

$$E_x=\frac{R_x(R_n+R_n')}{2R_nR_n'}E_n \tag{3-38}$$

而
$$\frac{R_n+R_n'}{2R_nR_n'}=\frac{2}{R_n+R_n'}\cdot\frac{(R_n+R_n')^2}{4R_nR_n'} \tag{3-39}$$

当 R_n 与 R_n' 相差很小时

$$(R_n+R_n')^2\approx 4R_nR_n' \tag{3-40}$$

故
$$E_x=\frac{2R_x}{R_n+R_n'}E_n \tag{3-41}$$

E_x 作为最后测量结果，不再含有线性系统误差。

【例 3-13】 在力学计量中，用天平和砝码测定质量时，由于天平两臂长之比受温度等影响，而使测量结果产生随时间变化的线性系统误差。为了消除这一误差可采用对称测量法。

具体步骤如下：

第一次用被测量 m 与平衡物 M 平衡；

第二次用标准砝码 M' 与平衡物 M 平衡；

第三次再用标准砝码 M'' 与平衡物 M 平衡，由于线性系统误差的影响，$M''\neq M'$ 而存在一差值 $\Delta M'$，即 $M''=M'+\Delta M'$；

第四次再用被测量并调整其值为 $m'=m+\Delta M''$ 与平衡物 M 平衡（$\Delta M''$ 为加减小砝码，其值为已知）。

测量时只要满足时间间隔 $t_2-t_1=t_4-t_3$ 的关系，取对称点为 $(t_2+t_3)/2$ 或 $(t_1+t_4)/2$，取两次对称测量平均值，有

$$\frac{m+m'}{2}=\frac{M'+M''}{2}=M \tag{3-42}$$

整理
$$m+m+\Delta M''=M'+M'+\Delta M' \tag{3-43}$$

则
$$m=M'+\frac{\Delta M'-\Delta M''}{2} \tag{3-44}$$

这个测量结果中不再含有线性系统误差。

我们把上述的测量程序简称为"$mM'M'm$"，同样还可采用"$M'mmM'$"程序达到同样的目的。

【例 3-14】 在长度计量中，检定量块平面平行性时，也是利用对称测量法来消除由于温度变化而引起的线性系统误差。如图 3-11 所示，先从标准量块 A 的中心点 o 调零，然后对被检量块 B 按 o'abcd 的顺序逐点检定，

然后再按 dcbao′的相反顺序进行检定，取正反两次读数的平均值作为各点的测量结果，即可消除因温度变化而引起的线性系统误差。

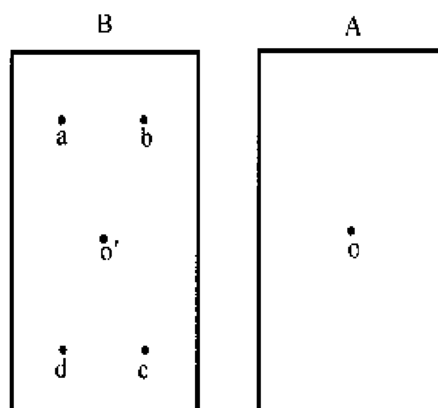


图 3-11

对称测量法是一种很好的测量方法。它可以有效地消除随时间或其他因素变化的线性系统误差。测量中的很多误差都随时间变化，且在短时间内均可认为是线性变化，即使复杂规律变化的系统误差，其一次近似也可视为线性误差。因此，对于一切高准确度的测量，均宜采用对称测量法。

2. 周期性系统误差消除法——半周期偶数测量法

所谓的半周期偶数测量法就是按系统误差变化的半个周期进行一次测量，每个周期内能得到两个测得值，取平均值作为测量结果，实现消除测量中的周期性系统误差的目的。

周期性系统误差一般可表示为

$$\varepsilon = a\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{3-45}$$

式中：a——常数；

T——误差变化周期；

t——决定周期性误差的参量(例如时间、角度等)。

当 t 为任一值 t_0 时，有

$$\varepsilon_0 = a\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_0\right) \tag{3-46}$$

当 t 由 t_0 经过半个周期 $T/2$ 时。即 $t=t_0+T/2$ 时，有

$$\varepsilon_\tau = -a\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_0\right) = -\varepsilon_0 \tag{3-47}$$

取两次测量误差的平均值

$$\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_\tau}{2} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_0}{2} = 0 \tag{3-48}$$

由此可见，在测得一个测量值后，相隔半个周期再测一次，取两次测量值的平均值作为测量结果，即可消除周期性系统误差。

由于仪表指针回转中心与圆形刻度盘中心不重合等引起的周期性系统误差，都可用半周期偶数测量法予以消除。例如，半周期偶数测量法广泛应用于测角仪器上。由于测角仪器上度盘与仪器的转轴不能做到绝对同心，会引起按正弦规律变化的周期性系统误差。为了消除这一系统误差，

通常在测角仪器上，在度盘对径的两个刻度上各装一个读数显微镜，用以进行半周期偶数测量。这种测量方法又称对径测量法。

3. 复杂规律变化的系统误差消除法——组合测量法

组合测量法是消除按复杂规律变化的系统误差的一种有效方法。所谓组合测量法就是对一组相互之间有依赖关系的被测量进行一系列不同组合的直接测量和间接测量，得到一组具有一定数学关系的方程组，求解其方程组确定被测量的量值。在测量过程中，使得某些系统误差的出现规律转变为随机性，即把系统误差随机化，以减弱或消除系统误差对测量结果的影响。

对于一些按复杂规律变化的系统误差，当不便分析它们或分析需耗费大量劳动和时间时，常常采用组合测量法来消除它们。例如长度计量中用于检定线纹尺的组合定标法和度盘测量中的定角组合测量法以及力学计量中检定砝码的组合测量法，都是这种方法的具体运用实例。

上面介绍的系统误差减弱和消除方法，仅是测量常用的几种方法。由于产生系统误差的因素很多，系统误差的种类繁多，其测量方法也很多。随着计量科学技术的发展，消除系统误差的新方法也不断涌现。例如，由于自动化测试技术的发展和各种微处理机的应用，人们可以用反馈修正法作为消除变值系统误差(包括一部分随机误差)的有效手段。当查明某种误差因素的变化(如某种形式的位移变化、温度、气压及介质折射率的变化，等等)对测量结果有较复杂的影响时，就尽可能找出其影响测量结果的函数关系或近似函数关系，在测量过程中用传感器将这些误差因素的变化，转换成某种物理量(一般为电量)，按照其函数关系或由计算机计算出影响测量结果的误差值，从测量结果中自行修正。如我国研制的激光光波比长仪，就是采用反馈修正法来修正由于气压、空气折射等误差因素对测量结果的影响的。

四、系统误差的消除准则

无论采用哪种系统误差的消除方法，进行多少次测量，都不能把系统误差全部消除，即最终测量结果总会残留一部分系统误差。这是由于科学技术水平的限制，使得测量仪器设计、制造不完善，测量方法不严密及人为因素所致。例如，在计量检定中，不论采取什么测量方法，仪器的灵敏度总是有限的，还有标准器本身的误差以及其他影响，不可避免地存在系统误差的残余部分。在实际测量中，只能把系统误差减弱到某种程度，数使它们对测量结果的影响减小到可以忽略不计。这时就认为系统误差已被消除。

但是，问题在于残余系统误差其数值究竟小到什么程度才可以认为忽略不计呢？这是经常遇到的实际问题。

假设最后残留的系统误差为ε_θ，根据保留有效数字的舍入原则，只要当$|\varepsilon_\theta|$不超过总的系统误差的绝对值$|\varepsilon|$的有效数字最后一位数的 1/2 个单位时，即可舍去ε_θ不计。于是可推论出消除系统误差的具体准则如下：

(1) 当总系统误差ε用一位有效数字表示时，若

$$|\varepsilon_\theta| < \frac{1}{2} \cdot \frac{|\varepsilon|}{10} = 0.05|\varepsilon| \tag{3-49}$$

则ε_θ即可忽略不计。

(2) 当总系统误差ε用两位有效数字表示时，若

$$|\varepsilon_\theta| < \frac{1}{2} \cdot \frac{|\varepsilon|}{100} = 0.005|\varepsilon| \tag{3-50}$$

则ε_θ即可忽略不计。

当残余系统误差ε_θ满足上述准则后，就认为对测量结果无影响，一般也就不需要再采取其他专门措施去进一步减小测量过程中的系统误差，因为更进一步减弱系统误差不仅困难，而且无济于事。

习题三

3-1 系统误差有哪些特征？

3-2 系统误差和随机误差的异同点有哪些？

3-3 对某量测量时，若残余误差和等于零，是否说明测量值就一定不含有系统误差？为什么？

3-4 测量中发现系统误差是好事还是坏事？为什么？

3-5 已定系统误差的不确定度为多少，为什么？

3-6 总结系统误差的一般处理原则。

3-7 已知某测量系统含有恒定系统误差$\varepsilon=+0.3$，用该测量系统测量某物理量，得测量算术平均值$\bar{x}=10.5$，不确定度估计为$\sigma_{\bar{x}}=0.1$，取$k=2$，写出测量结果。

第4章 粗大误差



超出在规定条件下预期的误差称为粗大误差。粗大误差的绝对值与测量列中其他测得值的误差分量相比明显偏大，即明显歪曲测量结果。含有粗大误差的测量值称为异常值或坏值，也称离群值。在测量数据处理时，对于异常值必须予以剔除。

第一节 粗大误差产生的原因

粗大误差主要是测量过程中某些意外发生的不正常因素造成的，可归纳为如下两个方面。

一、测量人员的主观因素

这主要是由于测量者在测量时的疏忽造成错误读取示值，错误记录测量值，错误计算和错误操作以及使用有缺陷的计量器具等人为因素引起的粗大误差。这是产生粗大误差的主要原因。

例如，选用未经计量检定的计量器具进行测量，记录测量数据时错把小数点移位等引起的误差均属测量人员主观因素造成的粗大误差。

二、外界条件的客观因素

测量过程中，由于测量条件发生意外的突变引起测量仪器示值的突然跳动而产生粗大误差。例如，测量过程中遇到机械冲击振动，温度的骤升和骤降及外界强电磁场的干扰，等等，此时得到的测量值，均为含有粗大误差的异常值。

提高测量人员的技术水平，培养严谨的科学态度和工作作风，加强责任心，保证测量条件在整个测量过程中的稳定，避免在外界条件剧烈变化

时进行测量等，可使粗大误差产生的机会大为减少。

第二节　可疑值处理的基本原则

在等精度多次重复测量过程中，有时会发现一两个测得值偏离其测量算术平均值较大，即该测得值的残余误差的绝对值较大，因而特别可疑。对于这样的可疑测量值，究竟是正常测量条件下由于测量值的分散性而必然出现的误差较大一点的正常值呢？还是偏离正常测量条件下出现的异常值呢？这就需要测量人员作出正确的判断。对于这样的可疑值，我们既不能为得到较好的测量结果无充分依据而轻率舍去，又不能无原则地作为正常的测量值对待处理。否则，要么是得到虚假的测量结果，要么是降低了测量的准确度。因此，对可疑值处理不当，势必会严重影响测量的准确度。所以，发现可疑值时，可按照下列基本原则进行处理。

一、直观判断，及时剔除

若某可疑值经分析确认是由于错读、错记、错误操作以及确实为测量条件发生意外的突然变化而得到的测量值，可以随时将该次测量得到的数据从测量记录中剔除。但在剔除时必须注明原因，不注明原因而随意剔除可疑值是不正确的。这种方法称为物理判别法，也叫直观判别法。

二、增加测量次数，继续观察

如果在测量过程中，发现可疑测量值又不能充分肯定它是异常值时，可以在维持等精密度测量条件的前提下，多增加一些测量次数。根据随机误差的对称性，以后的测量很可能出现与上述结果绝对值相近仅符号相反的另一测量值，此时它们对测量结果的影响便会彼此近于抵消。

三、用统计方法进行判别

在测量完毕后，还不能确定可疑测量值是否为含有粗大误差的异常值时，可按照依据统计学方法导出的粗大误差判别准则进行判别、确定。

四、保留不剔，确保安全

利用上述三种原则还不能充分肯定的可疑值，为保险起见，一般以不剔除为好。

第三节　粗大误差的统计判别方法

一、建立粗大误差统计判别方法的基本依据

在第2章已经叙及，测量中出现的随机误差大多数服从正态分布规律，由正态分布的单峰性和有界性可知，大误差出现的机会很少(对有限次测量而言，可看作是小概率事件)。由此，作为粗大误差统计判别方法建立的基本依据如下：

依根测量准确度的要求，给定一置信概率(例如99%等)，确定其随机误差的分布范围($-ks$, ks)，凡超出这个范围的误差，就认为是不属于正常测量条件下测量值所含有的随机误差，而应视为粗大误差予以剔除。

二、常用的统计判别方法

粗大误差的统计判别方法较多，目前推荐采用的判别方法有莱因达($3s$)准则、格拉布斯准则和狄克逊准则。下面分别予以介绍。

1. 莱因达($3s$)准则

前提条件：测得值不含有系统误差；随机误差服从正态分布。

若对某物理量等精度重复测量n次，得测得值x_1，x_2，…，x_n。莱因达认为：如果某测得值的残余误差的绝对值大于三倍的标准偏差时，即

$$|v_i| > 3s \tag{4-1}$$

则认为该误差为粗大误差，该次测得值为异常值，应剔除。

莱因达准则的合理性是显然的。对服从正态分布的随机误差，其残余误差落在($-3s$, $3s$)以外的概率仅为0.27%，即370次测量才出现一次，对有限次测量来说，可以认为是不可能发生的。

【例4-1】 等精密度测量某一物理量15次，把测得值x_i列入表4-1，试用莱因达准则判别该测量列中是否存在含有粗大误差的异常值。

表4-1

n	x_i	v_i	v_i^2	v_i'	$v_i'^2$
1	20.42	+0.016	0.000 256	+0.009	0.000 081
2	20.43	+0.026	0.000 676	+0.019	0.000 361
3	20.40	−0.004	0.000 016	−0.011	0.000 121
4	20.43	+0.026	0.000 676	+0.019	0.000 361
5	20.42	+0.016	0.000 256	+0.009	0.000 081

续表

n	x_i	v_i	v_i^2	v_i'	$v_i'^2$
6	20.43	−0.026	0.000 676	+0.019	0.000 361
7	20.39	−0.014	0.000 196	−0.021	0.000 441
8	20.30	−0.104	0.010 816		
9	20.40	−0.004	0.000 016	−0.011	0.000 121
10	20.43	+0.026	0.000 676	+0.019	0.000 361
11	20.42	+0.016	0.000 256	+0.009	0.000 081
12	20.41	+0.006	0.000 036	−0.001	0.000 001
13	20.39	−0.014	0.000 196	−0.021	0.000 441
14	20.39	−0.014	0.000 196	−0.021	0.000 441
15	20.40	−0.004	0.000 016	−0.011	0.000 121
	$\bar{l}=20.404$	$\sum v_i=0$	$\sum v_i^2=0.014\,960$		$\sum v_i'^2=0.003\,374$

解：首先根据测量数据计算算术平均值和残余误差

$$\bar{x}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i=20.404$$

$v_i=x_i-\bar{x}$，其值如表 4-1。

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15}v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.014\,960}{15-1}}=0.033$$

$$3s=0.099$$

用莱因达准则判别残余误差

$$v_8\,|_{max}=0.104>3s=0.099$$

则 v_8 为粗大误差，对应的测量值 $x_8=20.30$ 为异常值，应剔除。之后对剩余的 14 个测量值还要重新判别。这里要注意一点，重新判别时的测量次数应相应减少一次，这是容易理解的。

根据剩下的 14 个测量值重新计算：

$$\overline{x'}=\frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14}x_i=20.411$$

$v_i'=x_i-\overline{x'}$（v_8 不存在），其值如表 4-1。

$$s' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14} v_i'^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{0.003\ 374\ 0}{15-2}} = 0.016$$

$$3s' = 3 \times 0.016 = 0.048$$

用莱因达准则判别，14 个测得值的残余误差 v_i' 的绝对值均小于 $3s'$，故不再含有粗大误差。

莱因达准则是一个简便、保险但非常保守的判别准则，当测量次数 $n \leqslant 10$ 时，即使存在粗大误差也判别不出来。因此，在测量次数较少时，几乎不适于使用。当测量次数为 30 次以上时较为适宜。

2. 格拉布斯(Grubbs)准则

若对某物理量等精密度测量 n 次，得测得值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。假定测得值不含有系统误差，且测量值服从正态分布。分别计算测量算术平均值和标准偏差。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

为了判别测得值中是否有异常值，将测得值按其大小，由小到大排列成顺序统计量 $x_{(i)}$：

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$$

若认为 $x_{(1)}$ 是可疑测量值，则有统计量

$$g_{(1)} = \frac{\bar{x} - x_{(1)}}{s} \tag{4-2}$$

若认为 $x_{(n)}$ 是可疑测量值，则有统计量

$$g_{(n)} = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{s} \tag{4-3}$$

当 $g_{(i)} \geqslant g_0(n, \alpha)$ 时，则认为测得值 x_i 含有粗大误差，应予以剔除。

$g_0(n, \alpha)$ 为测量次数为 n 显著度为 α 时的统计量临界值，可由表 4-2 查取。

格拉布斯准则还可以用残余误差的形式表达。若测量列中的可疑值对应的残余误差 $|v_i|_{\max}$ 满足

$$|v_i|_{\max} > g_0(n, \alpha)s$$

则认为该可疑值 x_i 是含有粗大误差的异常值，应剔除。

表 4-2　$g(n, \alpha)$ 表

n	α		n	α	
	0.05	0.01		0.05	0.01
3	1.15	1.16	17	2.48	2.78
4	1.46	1.49	18	2.50	2.82
5	1.67	1.75	19	2.53	2.85
6	1.82	1.94	20	2.56	2.88
7	1.94	2.10	21	2.58	2.91
8	2.03	2.22	22	2.60	2.94
9	2.11	2.32	23	2.62	2.96
10	2.18	2.41	24	2.64	2.99
11	2.23	2.48	25	2.66	3.01
12	2.28	2.55	30	2.74	3.10
13	2.33	2.61	35	2.81	3.18
14	2.37	2.66	40	2.87	3.24
15	2.41	2.70	50	2.96	3.34
16	2.44	2.75	100	3.17	3.59

表中的 $g_0(n, \alpha)$值是按$\frac{x_{(n)}-\bar{x}}{s}$分布计算得出的，其中 s 用贝塞尔公式计算。

【例 4-2】 用格拉布斯准则判别下列一组等精密度测量所得的测得值中是否有异常值。

55.2，54.6，56.1，55.4，55.5，54.9，56.8，55.0，54.6，58.3

解：首先计算测量算术平均值和标准偏差

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=55.64$$

$$v_i=x_i-\bar{x}$$

v_i 分别为：-0.44，-1.04，$+0.46$，-0.24，-0.14，
-0.74，$+1.16$，-0.64，-1.04，$+2.66$

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{12.024}{10-1}}=1.16$$

确定绝对值最大的残余误差$|v_i|_{max}$和对应的可疑值

$$|v_i|_{max}=|v_{10}|=2.66\qquad 可疑值\ x_{10}=58.3$$

取 $\alpha=0.01$，由 $n=10$ 查表 4-2 得 $g_{(10,\,0.01)}=2.41$

利用格拉布斯准则判别

$$g_{(10,0.01)} \times s = 2.41 \times 1.16 = 2.80$$

$$|v_{10}| = 2.66 < g_{(10,0.01)} \times s = 2.80$$

故 x_{10} 不是粗大误差，也不是异常值，应保留。

3. 狄克逊(Dixon)准则

前面两种判别方法，均需求出算术平均值 $\bar{x}$、残余误差 v_i 和标准偏差 s。在实际工作中，显得计算量大，使用麻烦。面狄克逊准则是直接根据测得值按其大小顺序重新排列后的顺序统计量来判别可疑测量值是否为异常值的，可免去反复计算 $\bar{x}$，v_i 和 s 的繁琐劳动。

狄克逊准则也是以测量值中不含有系统误差，且测得值服从正态分布为前提条件的。

若对某物理量等精密度测量 n 次，得测得值 x_1，x_2，…，x_n。将此测量列由小到大按顺序重新排列成

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$$

狄克逊导出了顺序差统计量

$$d_{10} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}} \quad 或 \quad d'_{10} = \frac{x_{(1)} - x_{(2)}}{x_{(1)} - x_{(n)}}$$

$$d_{11} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(2)}} \quad 或 \quad d'_{11} = \frac{x_{(1)} - x_{(2)}}{x_{(1)} - x_{(n-1)}}$$

$$d_{21} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(2)}} \quad 或 \quad d'_{21} = \frac{x_{(1)} - x_{(3)}}{x_{(1)} - x_{(n-1)}}$$

$$d_{22} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(3)}} \quad 或 \quad d'_{22} = \frac{x_{(1)} - x_{(3)}}{x_{(1)} - x_{(n-2)}} \tag{4-4}$$

的分布及其在给定显著度 α 下的临界值 $d_0(n, \alpha)$，见表 4-3。若

$$d_{ij} > d_0(n, \alpha)$$

则认为相应最大测得值或最小测得值为含有粗大误差的异常值，应剔除。

狄克逊通过大量的实验认为：当 $n \leqslant 7$ 时，使用 d_{10} 效果好；当 $8 \leqslant n \leqslant 10$ 时，使用 d_{11} 效果好；当 $11 \leqslant n \leqslant 13$ 时，使用 d_{21} 效果好；当 $n \geqslant 14$ 时，使用 d_{22} 效果好。

【例 4-3】 用狄克逊准则判别下列测得值中是否有异常值。测得值中不含有系统误差且服从正态分布。

x_i：5.29，5.30，5.31，5.30，5.32，5.29，5.28，5.27，5.31，5.28

解：首先将测得值按大小顺序排列如表 4-3。

表 4 3

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{(i)}$	5 27	5.28	5.28	5.29	5.29	5.30	5.30	5.31	5.31	5.32

由于 $n=10$ 应按 d_{11} 计算统计量。首先检验 $x_{(10)}$ 是否是异常值

$$d_{11}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}=\frac{5.32-5.31}{5.32-5.28}=0.250$$

若取 $\alpha=0.01$ 查表 4-4 得临界值 $d_0(10, 0.01)=0.597$，有

$$d_{11}=0.250<d_0(10, 0.01)=0.597$$

说明 $x_{(10)}$ 不是异常值。

$$d'_{11}=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}=\frac{5.27-5.28}{5.27-5.31}=0.250$$

$$d'_{11}=0.250<d_0(10, 0.01)=0.597$$

说明 $x_{(1)}$ 也不是异常值。由此，我们可以得出结论，该测量列中没有异常值。

表 4-4　$d_0(n, \alpha)$数值表

统计量	n	α = 0.05 $d_0(n,\alpha)$	α = 0.01 $d_0(n,\alpha)$
$d_{10}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(1)}}$ $\left(d'_{10}=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n)}}\right)$	3	0.941	0.988
	4	0.765	0.889
	5	0.642	0.780
	6	0.560	0.698
	7	0.507	0.637
$d_{11}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$ $\left(d'_{11}=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}\right)$	8	0.554	0.683
	9	0.512	0.635
	10	0.477	0.597
$d_{21}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$ $\left(d'_{21}=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}\right)$	11	0.576	0.679
	12	0.546	0.642
	13	0.521	0.615

续表

统 计 量	n	α	
		0.05	0.01
		$d_0(n,\alpha)$	
$d_{22}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(3)}}$ $\left(d'_{22}=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-2)}}\right)$	14	0.546	0.641
	15	0.525	0.616
	16	0.507	0.595
	17	0.490	0.577
	18	0.475	0.561
	19	0.462	0.547
	20	0.450	0.535
	21	0.440	0.524
	22	0.430	0.514
	23	0.421	0.505
	24	0.413	0.497
	25	0.406	0.489

三、判别粗大误差应注意的几个问题

1. 准确找出可疑测量值

测量列中残余误差绝对值最大者即为可疑值。它为测量列中最大测得值或最小测得值之一，仅比较两者残余误差的大小即可确定。

2. 合理选择判别准则

可依据测量准确度的要求和测量次数来选择判别准则。一般情况下可这样考虑：当测量次数 $n\geqslant30$，或当 $n>10$ 做粗略判别时，可采用莱因达准则。当 $n\leqslant30$ 时，可采用格拉布斯准则或狄克逊准则。

3. 查找产生粗大误差的原因

对由判别准则确定为“异常值”的可疑值，不能简单剔除了事，还要仔细分析，找出产生异常值的具体原因，以做出正确的判断。

4. 判别准则的比较

用一种判别准则不能充分肯定的可疑值，建议按如下方法处理：若测量列中，仅存在一个不能充分肯定的可疑值时，应以格拉布斯准则判别结果为准；若同时存在两个不能充分肯定的可疑值时，应以狄克逊准则判别结果为准。

5. 全部测量数据的否定

若在有限次的测量列中，出现两个以上异常值时，通常可认为整个测量结果是在不正常的条件下得到的，对此应改进完善测量方法，重新进行有效测量。

习题四

4-1 粗大误差有哪些特征？对含有粗大误差的异常值应如何处理？

4-2 产生粗大误差的原因主要有哪几方面？怎样才能防止粗大误差的产生？

4-3 若在同一测量列中同时有两个可疑值的残余误差的绝对值超过界限检验值，能否一次都剔除？为什么？

4-4 用莱因达准则判别下列测得值中是否有异常值（假定测得值中不含有系统误差，且服从正态分布）。

x_i：15.2，14.6，16.1，15.4，15.5，14.9，16.8，15.0，14.6，18.3

4-5 分别取置信概率 $p_{a1}=95\%$ 和 $p_{a2}=99\%$，用格拉布斯准则判别第 4-4 题测量值中是否有异常值？并比较说明两种置信概率对判别结果的影响？

4-6 若对某物理量等精密度测量 9 次，得测得值 x_i：10.01，10.05，10.11，10.10，10.12，10.10，10.12，10.08，10.10，测得值不含有系统误差且服从正态分布。试用狄克逊准则判别测量列中是否有异常值（取 $\alpha=0.01$）。

第5章 测量不确定度

测量的目的是为了得到被测量的真值，由于测量误差的存在，使得被测量的真值难以确定，其测量结果只能得到一个真值的近似估计值和一个用于表示近似程度的误差范围，导致测量结果不能定量(表示)给出，具有不确定性。引入“测量不确定度”的概念，利用测量不确定度的表示来定量评定测量水平或质量，是误差理论发展的一个重要成果。

第一节　测量不确定度的基本概念

一、产生背景

测量不确定度的概念，真正得到国际组织和各国的认可及广泛应用始于20世纪90年代的。在此之前，人们一直使用“测量误差”来评定测量结果质量高低，由于测量误差是一个理想化的概念，实际中难以准确定量确定，加之系统误差和随机误差在某些情况下界限不是十分清楚，使得同一被测量在相同条件下的测量结果因评定方法不同而不同，从而引起测量数据处理方法和测量结果的表达不统一，影响国际间交流。

鉴于测量误差实际评定中存在的难以克服的缺陷，一些学者提出用“测量不确定度”作为测量结果质量高低的指标参数，随后一些国家计量部门相继接受并使用不确定度，但对于不确定度的理解和表示方法尚缺乏一致，直到1980年国际计量局(BIPM)召集和成立了不确定度表示工作小组，在广泛征求各国意见的基础上起草了一份《实验不确定度建议书INC—1》。该建议书向各国推荐了不确定度的表示原则，从而使测量不确定度的表示方法逐渐趋于统一。1981年，第七十届国际计量委员会(CIPM)批准了上述建议，并发布了一份CIPM建议书，即CI—1981。1986年，CIPM再次重

中采用上述测量不确定度表示的统一方法，并发布了CIPM建议书CI—1986。这份CIPM建议书推荐的方法，以INC—1(1980)为基础，要求所有CIPM及其咨询委员会赞助下的国际比对及其他工作的参加者，在给出结果时必须使用合成不确定度。

CIPM建议的不确定度表示方法开始在世界各国许多实验室和计量机构使用。为了进一步促进CIPM方法在国际上的更加广泛使用，在CIPM的要求下，由国际标准化组织(ISO)联合国际电工委员会(IEC)、国际计量局(BIPM)、国际临床化学联合会(IFCC)、国际理论化学与应用化学联合会(IUPAC)、国际理论物理与应用物理联合会(IUPAP)、国际法制计量组织(OIML)七个国际组织共同组成了国际测量不确定度工作组，在INC—1(1980)建议书的基础上，起草制定了《测量不确定度表示指南》(缩写为GUM)。1993年，GUM以7个国际组织的名义正式由国际标准化组织颁布实施，并在1995年又作了修订。

GUM是在INC—1(1980)、CI—1986的基础上编制而成的应用指南，在术语定义、概念、评定方法和报告的表达方式上都作了明确的统一规定。它代表了当前国际上表示测量结果及其不确定度的约定做法，从而使不同国家、不同地区、不同学科、不同领域在表示测量结果及其不确定度时具有一致的含义。因此，GUM得以在世界各国得到执行和广泛应用。

为了更好地贯彻GUM在我国的实施，由全国法制计量委员会委托中国计量科学研究院起草制定了国家计量技术规范《测量不确定度评定与表示》(JJF1059—1999)。该规范原则上等同GUM的基本内容，作为我国统一准则对测量结果及其质量进行评定、表示和比较。

二、测量不确定度的定义及分类

测量不确定度定义为表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。此参数可以是标准差或其倍数，或说明了置信水准的区间的半宽度，其值恒为正值。

不确定度一词意指可疑程度。就广义而言，测量不确定度意为对测量结果正确性的可疑程度。为此，测量不确定度也曾有不同形式的定义："由测量结果给出的被测量估计值的可能误差的度量"；"表征被测量的真值所处范围的评定"；"由于测量误差的存在，使得测量结果不能肯定的程度"。所有的测量不确定度的定义没有本质上的区别，其评定方法均相同，表达形式也一样。

一个完整的测量结果应当包括被测量之值的最佳估计值和测量不确定度两部分。例如，被测量X的测量结果为$x \pm U$，其x是X的最佳估计值，

U 是 x 的测量不确定度。测量结果又可展开表示为($x+U$，$x-U$)，显然被测量 X 的测量结果所表示的并非一个确定的值，它表征了被测量的真值所处范围的评定。

以标准差表示的测量不确定度称为标准不确定度。标准不确定度依据其评定方法分为“A”、“B”两类。用对观测列进行统计分析的方法来评定的标准不确定度称为不确定度的 A 类评定，又称为 A 类不确定度评定，简称 A 类不确定度。它的特点是必须对被测量进行多次测量，通过对观测列用统计分析方法评定得出。表征 A 类评定所得不确定度分量的方差估计值记为 u^2，由一系列重复观测值算得，u^2 即统计方差 σ^2 的估计值 s^2。而 A 类标准不确定度 u 为 u^2 的正平方根值，故 $u=s$。

用不同于对观测列进行统计分析的方法来评定的标准不确定度称为不确定度 B 类评定，有时又称为 B 类不确定度评定，简称 B 类不确定度。A 类以外的不确定度均属 B 类不确定度。B 类不确定度依据有关信息评定，所得的不确定度分量的估计方差为 u^2，则 B 类标准不确定度为 u。

将标准不确定度区分为 A 类和 B 类的目的，在于说明计算不确定度分量的两种不同途径，仅仅是为了便于研究而已，并非执意表明两种方法得到的不确定度分量在本质上存在差异，两种评定方法均基于概率分布，并都用标准差表征。

这里需要说明，A 类标准不确定度与随机误差并不是对应关系，B 类标准不确定度与系统误差也不是对应关系。“随机”与“系统”表示两种不同的性质，而“A 类”与“B 类”表示两种不同的评定方法。因此简单地把 A 类不确定度对应于随机误差导致的不确定度；把 B 类不确定度对应于系统误差导致的不确定度的做法是错误的。

当测量结果是由若干个其他量的值求得时，按其他各量的方差或协方差算得的标准不确定度称为合成标准不确定度，统一规定用符号 u_c 表示。它是测量结果标准差的估计值。

由于标准偏差所对应的置信水准(也称为置信概率)通常还不够高，在正态分布情况下仅为 68.27%，因此还规定测量不确定度也可以用标准偏差的倍数 $k\sigma$ 来表示。这种不确定度称为扩展不确定度，有时也称展伸不定度或范围不确定度，统一规定用大写英文字母 U 表示。于是可得标准不确定度和扩展不确定度之间的关系：

$$U=k\sigma=ku$$

式中，k 称为包含因子(有时也称为覆盖因子)。

扩展不确定度表示具有较大置信水准区间的半宽度。包含因子有时也写成 k_p 的形式，它与标准不确定度 $u_c(y)$ 相乘后，得到对应于置信水准为 p

的扩展不确定度 $U_p = k_p u_c(y)$。

在实际使用中，往往希望知道测量结果的置信区间，因此还规定测量不确定度也可以用说明了置信水准的区间的半宽度 a 来表示。实际上它也是一种扩展不确定度，当规定的置信水准为 p 时，扩展不确定度可以用符号 U_p 表示。

当已知包含因子 k 时，扩展不确定度 U 是从其中包含多少个（k 个，k 即为包含因子）标准不确定度 u 的角度出发所描述的扩展不确定度。而当已知 p 时。扩展不确定度 U_p 则是从该区间所对应的置信水准 p 的角度出发来描述的扩展不确定度。两者各自分别从不同的角度出发来描述扩展不确定度，因此包含因子 k 与置信水准 p 之间应该存在某种联系，但他们之间的关系与被测量的分布有关。也就是说，只有在知道被测量分布的情况下，才可以由 k 确定 p，或由 p 确定 k。这就是为什么在测量不确定度评定中经常需要考虑被测量分布的原因。

JJF1059－1999 规定，当置信水准 p 为 0.99 和 0.95 时，U_p 可分别以 U_{99} 和 U_{95} 表示。

误差可以用绝对误差和相对误差两种形式来表示，不确定度也同样可以有绝对不确定度和相对不确定度两种形式。绝对形式表示的不确定度与被测量有相同的量纲。相对形式表示的不确定度，其量纲为 1，或称为无量纲。被测量 x 的标准不确定度 $u(x)$ 和相对标准不确定度 $u_{rel}(x)$ 间的关系为

$$u_{rel}(x) = \frac{u(x)}{x}$$

根据定义，测量不确定度是与测量结果相联系的参数，意指测量不确定度是一个与测量结果“在一起”的参数，在测置结果的完整表述中应该包括测量不确定度。

既然测量不确定度是与测量结果相联系的参数，就是说只有测置结果才有不确定度，或者说不是测量结果就没有不确定度。因此一般不用测量不确定度来表示测量仪器的特性，因为没有对测量仪器的不确定度下过定义，只有用仪器得到的测量结果才有不确定度。而测量仪器的特性可以用示值误差或最大允许误差等术语来描述。一般不要采用“测量仪器的不确定度”或“计量标准的不确定度”这种说法。

可以将测量仪器或计置标准的不确定度理解为他们所提供的标准量值的不确定度。对于经过校准而已知其示值误差的测量仪器，有时也简单地将示值误差的不确定度叫做测置仪器的不确定度。实际上他们还是测量结果的不确定度，因为该标准量值或示值误差就是对该仪器进行校准时的测

量结果。

三、测量误差与测量不确定度

测量误差和测量不确定度是误差理论中两个重要的概念，它们具有相同点，都是评价测量结果质量高低的重要指标。但它们又有明显的区别，必须正确认识和区分，以防混淆和误用。

测量误差与测量不确定度的主要区别如下，并摘要示于表 5-1。

1. 定义

测量误差和测量不确定度两者最根本的区别在于误差表示测量结果对真值的偏离，因此它是一个确定的值。而不确定度表明被测量之值的分散性，它以分布区间的半宽表示，因此它表示一个区间。

2. 分类

按出现于测量结果中的规律，误差通常分为两类：随机误差和系统误差。随机误差表示测量结果与无限多次测量结果的平均值(也称为总体均值)之差，而系统误差则是无限多次测量结果的平均值与真值之差，因此它们都是无限多次测量的理想概念。由于实际上只能进行有限次测量，因此只能用有限次测量的平均值，即样本均值来作为无限多次测量结果平均值的估计值。也就是说，在实际工作中我们只能得到随机误差和系统误差的估计值。而不确定度则是根据对其标准不确定度的评定方法而分成 A 类和 B 类，他们与“随机误差”和“系统误差”的分类之间不存在简单的对应关系。“随机”和“系统”表示两种不同的性质，而“A 类”和“B 类”表示两种不同的评定方法。目前，国际上一致认为，为避免误解和混淆，不再使用“随机不确定度”和“系统不确定度”这两个术语。在进行测量不确定度评定时，一般不必区分各不确定度分量的性质。若需要区分时，应表述为“由随机效应引入的测量不确定度分量”和“由系统效应引入的不确定度分量”。

3. 可操作性

误差的概念与真值相联系，而系统误差和随机误差又与无限多次测量的平均值有关，因此两者都是理想化的概念。实际上只能得到其估计值，因而误差的可操作性较差。不确定度则可以根据实验、资料、经验等信息进行评定，从而可以定量确定。

4. 数值符号

根据误差的定义，误差表示两个量的差值。当测量结果大于真值时误差为正值，当测量结果小于真值时误差为负值。因此误差不应当以“±”号的形式出现。而根据规定，不确定度恒为正值，故在不确定度之前也不能

冠以“±”号。

5. 合成方法

误差是一个确定的值，因此对各误差分量进行合成时，采用代数相加的方法进行合成，而不确定度表示一个区间，因此当各不确定度分量彼此独立或不相关时，用方和根法进行合成，否则应考虑加入相关项。

6. 结果修正

已知系统误差的估计值时，可以对测量结果进行修正，得到已修正的测量结果。但不能用不确定度对测量结果进行修正。对已修正测量结果进行不确定度评定时，应考虑修正不完善引入的不确定度分量。

表 5-1 测量误差与测量不确定度的主要区别

序号	内容	测量误差	测量不确定度
1	定义	表明测量结果偏离真值，是一个确定的值	表明被测量之值的分散性，是一个区间。用标准偏差，标准偏差的倍数，或说明了置信水准的区间的半宽度来表示
2	分类	按出现于测量结果中的规律。分为随机误差和系统误差，它们都是无限多次测量的理想概念	按是否用统计方法求得，分为 A 类评定和 B 类评定。它们都以标准不确定度表示。 在评定测量不确定度时，一般不必区分其性质。若需要区分时，应表述为“由随机效应引入的测量不确定度分量”和“由系统效应引入的不确定度分量”
3	可操作性	由于真值未知，往往不能得到测量误差的值。当用一约定真值代替真值时，可以得到测量误差的估计值	测量不确定度可以由人们根据实验、资料、经验等信息进行评定，从而可以定量确定测量不确定度的值
4	数值符号	非正即负(或零)，不能用正负(±)号表示	是一个无符号的参数，恒取正值。当由方差求得时，取其正平方根
5	合成方法	各误差分量的代数和	当各分量彼此独立时用方和根法合成，否则应考虑加入相关项
6	结果修正	已知系统误差的估计值时，可以对测量结果进行修正，得到已修正的测量结果	不能用测量不确定度对测量结果进行修正。对已修正测量结果进行不确定度评定时，应考虑修正不完善引入的不确定度分量

续表

序号	内容	测量误差	测量不确定度
7	结果说明	误差是客观存在且不以人的认识程度而转移。误差属于给定的测量结果。相同的测量结果具有相同的误差，而与得到该测量结果的测量仪器和测量方法无关	测量不确定度与人们对被测量、影响量以及测量过程的认识有关。合理赋予被测量的任一个值，均具有相同的测量不确定度
8	实验标准差	来源于给定的测量结果，它不表示被测量估计值的随机误差	来源于合理赋予的被测量之值，表示同一观测列中，任一个估计值的标准不确定度
9	自由度	不存在	可作为不确定度评定可靠程度的指标
10	置信概率	不存在	当了解分布时，可按置信概率给出置信区间

7. 结果说明

测量结果的不确定度表示在重复性或复现性条件下测量结果的分散性，因此测量不确定度仅与测量方法有关，而与具体测得的数值大小无关。此处所述的测量方法应包括测量原理、测量仪器、测量环境条件、测量程序、测量人员以及数据处理方法等，而根据定义，测量结果的误差仅与测量结果以及真值有关，而与测量方法无关。

例如，用钢板尺测量某一物体的长度，得到测量结果为14.5mm。如果为测量得更准确一些而改用卡尺进行测量，假设得到的测量结果仍为14.5mm。不少人可能会认为后者的测量误差更小一些，但实际是由于两者的测量结果相同，真值也相同，因此它们的测量误差也相同。而两者的测量不确定度则是不同的。因为如果两种方法分别进行多次重复测量的话，它们的测量结果的分散性是不同的。

虽然测量误差和测量不确定度都可用来描述测量结果，测量误差是描述测量结果对真值的偏离，而测量不确定度则描述被测量之值的分散性，但两者在数值上并无确定的关系。测量结果可能非常接近于真值，此时其误差很小，但由于对不确定度来源认识不足，评定得到的不确定度可能很大。也可能测量误差实际上较大，但由于分析估计不足，评定得到的不确定度可能很小，例如当存在还未发现的较大系统误差时。

由于误差等于测量结果减去被测量的真值，因此只有在已知约定真值的条件下才可能通过测量结果得到误差，因此误差是由测量得到的，而不

是由分析评定得到的。而不确定度则可以通过分析评定得到，有时还得辅以必要的实验测量。

误差理论是测量不确定度的基础。研究测量不确定度首先需要研究误差，只有对误差的性质、分布规律、相互联系及对测量结果的误差传递关系等有了充分的认识和了解，才能更好地估计各不确定度分量，正确得到测量结果的不确定度。测量不确定度是建立在误差理论基础上的新概念，其理论体系是对经典误差理论的充实和完善。

四、产生测量不确定度的原因

测量过程中的随机效应和系统效应均会导致测量不确定度，具体的测量不确定度因素可从以下几个方面分析归纳：

1. 被测量的定义不完整或不完善

例如：定义被测量是一根标称值为 1m 长的钢棒的长度。如果要求测准至 μm 量级，则被测量的定义就不够完整。因为此时被测钢棒受温度和压力的影响已较明显，而这些条件没有在定义中说明，由于定义的不完整使测量结果引人温度和压力影响的不确定度。这时完整的被测量定义应是：标称值为 1m 的钢棒在 25.0℃和 101 325Pa 时的长度。若在定义要求的温度和压力下测量，就可避免由此引起的不确定度。

2. 实现被测量定义的方法不理想

如上例，完整定义的被测量，由于测量时温度和压力实际上达不到定义的要求(包括由于温度和压力的测量本身存在不确定度)，使测量结果引入不确定度。又如在微波测量中，“衰减”量是在匹配条件下定义的，但实际测量系统不可能理想匹配，因此失配会引起不确定度。

3. 取样的代表性不够，即被测量的样本不能完全代表所定义的被测量

例如：被测量为某种介质材料在给定频率时的相对介电常数。由于测量方法和测量设备的限制，只能取这种材料的一部分做成样块，然后对其进行测量，如果测量所用的样块在材料的成分或均匀性方面不能完全代表定义的被测量，则样块就引起测量不确定度。

4. 对测量过程受环境影响的认识不周全，或对环境条件的测量与控制不完善

同样以上述钢棒为例，不仅温度和压力影响其长度，实际上，温度和钢棒的支承方式都有明显影响，但由于认识不足，没有采取措施，就会引起不确定度。此外在按被测量的定义测量钢棒的长度时，测量温度和压力所用的温度计和压力表的不确定度也是不确定度的来源。

又比如在水银温度计的检测中，被检温度计和标准温度计都放在同一个恒温槽中进行检测，恒温槽内的温度由一台温度控制器控制，在实际工作中控制器不可能将恒温槽的温度稳定在一个恒定值，实际的槽温将在一个小的温度范围内往复变化，这样，由于标准和被检温度计的温度响应时间常数不同也会引起不确定度。

5. 对模拟式仪器的读数存在人为偏差（偏移）

模拟式仪器在读取其示值时，一般是估读到最小分度值的1/10。由于观测者的位置和观测者个人习惯的不同等原因，可能对同一个状态下的显示值会有不同的估读值，这种差异将产生不确定度。

6. 测量仪器计量性能（如灵敏度、鉴别力阈、分辨力、死区及稳定性等）上的局限性

数字仪器的不确定度来源之一，是其指示装置的分辨力。例如，即使示值为理想重复，重复性所贡献的测量不确定度仍然不为零，因为仪器的输入信号在一个已知区间内变动，却给出同样的示值。如果指示装置的分辨力为δ_x，产生某一示值X的激励源的值以等概率落在$X-(\delta_x/2)$到$X+(\delta_x/2)$区间内。该激励源就用方差为$u^2=(\delta_x)^2/12$，宽度为δ_x的矩形概率分布来描述，对任一示值，其标准偏差为$u=0.294\delta_x$。

因此，对于一台数字式称重仪器，其指示装置的最低位数字是1g时，装置分辨力的方差为$u^2=\frac{1}{12}g^2$，标准不确定度为$u=\frac{1}{\sqrt{12}}g=0.29g$。

7. 数予计量标准的值和标准物质的值不准确

通常的测量是将被测量与测量标准的给定值进行比较实现的，因此，标准的不确定度直接引入测量结果。例如用天平测量时，测得质量的不确定度中包括了标准砝码的不确定度。

8. 引用的数据或其能参量的不确定度

例如，在测量黄铜的长度随温度变化时，要用到黄铜的线热膨胀系数a_t，查数据手册可以找到所需的a_t值，该值的不确定度也可由手册查出，它同样是测量结果不确定度的一个来源。

9. 与测量方法和测量程序有关的近似性和假定性

例如，被测量表达式的近似程度，自动测试程序的迭代程度，电测量中由于测量系统不完善引起的绝缘据电、热电势、引线电阻上的压降等，均会引起不确定度。

10. 在表面上看来完全相同的条件下，被测量重复观测值的变化

在实际工作中我们经常会发现，无论怎样控制环境条件以及各类对测

量结果可能产生影响的因素，而最终的测量结果总会存在一定的分散性，即多次测量的结果并不完全相等。这种现象是一种客观存在，是由一些随机效应造成的。

上述不确定度的来源可能相关，例如，第 10 项可能与前面各项有关。对于那些尚未认识到的系统效应，显然是不可能在不确定度评定中予以考虑的，但它可能导致测量结果的误差。

由此可见，测量不确定度一般来源于随机性或模糊性。前者归因于条件不充分，后者归因于事物本身概念不明确。因而测量不确定度一般由许多分量组成，其中一些分量具有统计性，另一些分量具有非统计性。所有这些不确定度来源，若影响到测量结果，都会对测量结果的分散性作出贡献。也就是说由于这些不确定度来源的综合效应，使测量结果的可能值服从某种概率分布。可以用概率分布的标准差来表示测量不确定度，即标准不确定度，它表示测量结果的分散性。也可以用具有一定置信概率的区间来表示测量不确定度。

分析测量不确定度来源时应该全面考虑，做到不遗漏，不重复，特别是应考虑对结果影响大的不确定度来源。遗漏会使测量不确定度虚假地过小，重复会使测量不确定度无故地降低。

五、测量过程的数学模型的建立

测量不确定度的分析与评定是从确定测量方法和建立测量过程的数学模型开始的，它是正确合理评定测量不确定度的基础。

建立数学模型也称测量模型化，目的是要建立满足测量不确定度评定要求的数学模型，即被测量 Y 和所有各影响量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 间的函数关系，其一般形式可写为

$$Y=f(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$$

式中，Y 称为被测量或输出量，而 X_i 则称为影响量或输入量。

若被测量 Y 的估计值为 y，输入量 X_i 的估计值为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

1. 对数学模型的要求

数学模型应包含能影响测量结果的全部影响量，它既能用来计算测量结果，又能用来全面地评定测量结果的不确定度。由于在许多情况下，用来计算测量结果的公式是一个近似式，因此不要把数学模型简单地理解为就是计算测量结果的公式，也不要理解为就是测量的基本原理公式。在许多情况下他们经常是有区别的。

原则上，似乎所有对测量结果有影响的输入量都应该在计算公式中出

现，但实际情况却不然，有些输入量虽然对测量结果有影响，但由于信息量的缺乏，在具体测量时无法定量地计算出它对测量结果影响的大小。此时只能将其作为测量不确定度处理，这些输入量将不会出现在测量结果的计算公式中。也有些输入量由于对测量结果的影响很小而被忽略，故在测量结果的计算公式中也不出现，但他们对测量结果不确定度的影响却可能是必须考虑的。如果仅从计算公式出发来进行不确定度评定，则上述这些不确定度分量就可能被遗漏。

在不确定度评定中，建立一个合适的数学模型是测量不确定度评定合理与否的最关键的一步。一个好的数学模型应该能满足下述条件：

(1) 数学模型应包含能影响测量结果的全部输入量；

(2) 不遗漏任何能影响测量结果的不确定度分量；

(3) 不重复计算任何一项对测量结果有影响的不确定度分量；

(4) 当选取的输入量不同时，有时数学模型可以写成不同的形式。不同输入量之间的相关性可能不同，此时应选择合适的输入量，以避免处理较麻烦的相关性。

建立数学模型应和寻找各影响测量不确定度的来源同步反复进行。一般先根据测量原理设法从理论上导出初步的数学模型。然后再将初步模型中遗漏的能影响测量不确定度的输入量一一补充，使数学模型逐步完善。

2. 数学模型的建立

若被测量的量值能够通过计量器具直接测得，而且不需要经过任何其他计算，这种被称为直接测量的测量方程式可简单表示为

$$Y = X \tag{5-1}$$

式中 X 为输入量，也是被测量，Y 为输出量，也是被测量。式(5-1)称为直接测量过程的数学模型。直接测量问题在实际测量中非常常见，如用一卡尺测量工件尺寸时，则工件的尺寸就等于卡尺的示值。需要说明的是，对于测量准确度要求较高，必须考虑被测量以外的影响量时(如温度变化对工件尺寸的影响)，其数学模型随之变成为如下所述的间接测量过程的形式。

在实际测量的很多情况下，被测量 Y 不能直接测得，而是先直接测量与之有关的其他量 X_1，X_2，…，X_N，然后通过函数关系式

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_N) \tag{5-2}$$

来确定。这种函数关系式就称为间接测量过程的数学模型，简称数学模型。

由于数学模型可能不完善，所有有关的量应充分地反映其实际情况的变化，以便可以根据尽可能多的观测数据来评定不确定度。在可能情况下，应采用按长期积累的数据建立起来的经验模型。核查标准和控制图可以表明测量过程是否处于统计控制状态之中，有助于数学模型的建立和测量不

确定度的评定。

数学模型不是惟一的，如果采用不同的测量方法和不同的测量程序，就可能有不同的数学模型。例如：

一个随温度 t 变化的电阻器两端的电压为 V，在温度为 t_0 时的电阻为 R_0，电阻器的温度系数为 α，则电阻器的损耗功率 P(输出量或被测量)取决于 V，R_0，α 和 t(输入量)，即

$$P=f(V, R_0, \alpha, t)=V^2/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\}$$

同样是测量该电阻器的损耗功率 P，我们也可采用测量其端电压和流经电阻的电流 I 来获得，则 P 的数学模型就变成

$$P=f(V, I)=VI$$

输出量 Y 的输入量 X_1，X_2，…，X_n 本身可看作被测量，也可取决于其他量，甚至包括具有系统效应的修正值，从而可能导出一个十分复杂的函数关系式，以至函数 f 不能明确地表示出来。

数学模型可用已知的物理公式求得，也可用实验的方法确定，甚至只用数值方程给出(数值方程为物理方程的一种，用于表示在给定测量单位的条件下，数值之间的关系，而无物理量之间的关系)。如果数据表明 f 没有能将测量过程模型化至测量所要求的准确度，则必须在 f 中增加输入量，即增加影响量。例如在电阻功率的测量中，增加电阻上已知的温度非均匀分布、电阻温度系数的非线性关系、电阻值与大气压力的关系等，直至测量结果满足测量要求。

设式(5-2)中被测量 Y 的估计值为 y，输入量 X_i 的估计值为 x_i，则有

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_N) \tag{5-3}$$

在式(5-2)中，大写字母表示的量的符号既代表可测的量，也代表随机变量。当叙述为只具有某概率分布时，这个符号的含义就是随机变量。

在一列观测值中，第 k 个 X_i 的观测值用 x_{ik} 表示。如电阻器的电阻符号为 R，则其观测列中的第 k 次值表示为 r_k。

在式(5-3)中，当被测量 Y 的最佳估计值 y 是通过输入量 X_1，X_2，…，X_N 的估计值 x_1，x_2，…，x_N 得出时，可有以下两种方法：

第一种

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{Nk}) \end{aligned} \tag{5-4}$$

式(5-4)中，y 是取 Y 的 n 次独立观测值 y_k 的算术平均值，其每个观测值 y_k 的不确定度相同，且每个 y_k 都是根据同时获得的 N 个输入量 X_i 的一组

完整的观测值求得的。

第二种

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_N) \tag{5-5}$$

式(5-5)中，$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$，它是独立观测值 x_{ik} 的算术平均值。这一方法的实质是先求 X_i 的最佳估计值 $\bar{x}_i$，再通过函数关系式得出 y。

以上两种方法，当 f 是输入量 X_i 的线性函数时，它们的结果相同。但当 f 是 X_i 的非线性函数时，用式(5-4)和式(5-5)计算出 Y 的最佳估计值可能不同，而以式(5-4)的计算方法较为优越。

假如我们用输入量 A 表示长，用输入量 B 表示宽，由面积公式我们可得到输出量的数学模型为 $S=AB$。假设对长 A 和宽 B 分别进行了两次测量，其结果(估计值)分别为 a_1，a_2 和 b_1，b_2，则由式(5-4)可求得面积的一个最佳估计值为

$$s_1 = \frac{1}{2}(a_1b_1 + a_2b_2)$$

同样，利用式(5-5)可求得面积的另一个最佳估计值为

$$s_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1)$$

由于测量结果存在分散性，一般 $a_1 \neq a_2$，$b_1 \neq b_2$ 所以 $s_1 \neq s_2$，这时可认为依式(5-4)的计算结果 s_1 更具有优越性。

在数学模型中，输入量 X_1，X_2，…，X_N 可以是：

①由当前直接测定的量。它们的值与不确定度可得自单一观测、重复观测、依据经验对信息的估计，并可包含测量仪器读数修正值，以及对周围温度、大气压、湿度等影响的修正值。

②由外部来源引入的量。如已校准的测量标准、有证标准物质、由手册所得的参考数据等。

必须强调指出一点，对于有国家规定检测方法的测量项目，其对应的国家标准或检测技术规范对测量方法、数学模型、测量条件、测量程序步骤和结果评定方法均做了详尽的规定，是具有法律效力的技术文件，必须遵守。

六、测量不确定度传播律

测量不确定度通常由测量过程的数学模型和不确定度的传播律来评定。测量过程的数学模型建立之后，确定测量不确定度传播公式则是测量

不确定度评定又一重要步骤。

由 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 可得到输出量(被测量)Y 的估计值 y(测量结果)的不确定度为

$$u^2(y)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^2 u^2(x_1)+\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^2 u^2(x_2)+\cdots+$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_N}\right]^2 u^2(x_N)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]u(x_i, x_j) \tag{5-6}$$

式(5-6)称为测量不确定度传播律，其中 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 称为灵敏系数，$u(x_i)$ 分别为输入量 X_i 的估计值 x_i 的标准不确定度，$u(x_i, x_j)$ 为任意两输入量估计值的协方差函数。

各输入估计值 x_i 及其标准不确定度 $u(x_i)$ 得自输入量 X_i 可能值的概率分布。此概率分布可能是基于 X_i 的观测列的频率分布，也可能是基于经验和有用信息的先验分布。标准不确定度分量的 A 类评定基于频率分布，B 类评定基于先验分布。应认识到，A，B 两类评定只是评定方法的不同，其本质是相同的。

第二节　标准不确定度的 A 类评定

一、单次测量结果实验标准差与平均值实验标准差

对被测量 X，在重复性条件下进行 n 次独立重复观测，观测值为 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$。算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{5-7}$$

$s(x_i)$ 为单次测量的实验标准差，由贝塞尔公式计算得到

$$s(x_i)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{5-8}$$

$s(\bar{x})$ 为平均值的实验标准差，其值为

$$s(\bar{x})=\frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} \tag{5-9}$$

某物理量的观测值，若已消除了系统误差，只存在随机误差，则观测值散布在其期望值附近。当取若干组观测值，它们各自的平均值也散布在期望值附近，但比单个观测值更靠近期望值。也就是说，多次测量的平均值比一次测量值更准确，随着测量次数的增多，平均值收敛于期望值。因此，通常以样本的算术平均值 $\bar{x}$ 作为被测量值的估计(即测量结果)，以平均值的实

验标准差 $s(\bar{x})$ 作为测量结果的标准不确定度，即 A 类标准不确定度。

如果测量结果是取上面 n 次独立重复观测中的 m 次的算术平均值 $\bar{x}_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$，则 $\bar{x}_m$ 对应的 A 类标准不确定度为 $s(x_i)/\sqrt{m}$。

所以，当测量结果取观测到的任一次 x_i 时所对应的 A 类不确定度为

$$u(x) = s(x_i) \tag{5-10}$$

当测量结果取 n 次的算术平均值时，$\bar{x}$ 所对应的 A 类不确定度为

$$u(\bar{x}) = s(x_i)/\sqrt{n} \tag{5-11}$$

当测量结果取其中的 m 次的平均值 $\bar{x}_m$ 时，$\bar{x}_m$ 所对应的 A 类不确定度

$$u(\bar{x}_m) = s(x_i)/\sqrt{m} \tag{5-12}$$

$u(x)$、$u(\bar{x})$ 和 $u(\bar{x}_m)$ 的自由度是相同的，都是

$$\nu = n - 1 \tag{5-13}$$

观测次数 n 充分多，才能使 A 类不确定度的评定可靠，一般认为 n 应大于 6。但也要视实际情况而定，当该 A 类不确定度分量对合成标准不确定度的贡献较大时，n 不宜太小，反之，当该 A 类不确定度分量对合成标准不确定度的贡献较小时，n 小一些关系也不大。

式(5-12)用于测量结果是取测量 2～3 次的算术平均值计(如检定规程要求这样做)，为了获得较高的自由度，采取较多次的测量得到 $s(x_i)$。

$s(x_i)$ 的获得，并不是每一次、每一个测量点都要进行多次测量。可以采用以前或同类测量所得到的实验标准差；在一个量程有多个受检点的情况下(如检定材料试验机的示值误差)，可以选取示值变动性最大的点进行多次测量而得到实验标准差 $s(x_i)$，用以代表整个量程各点。

当不确定度以绝对形式表示(如千分尺)时，通常选取整个量程最大检定点进行多次测量，计算实验标准差 $s(x_i)$，用以代表整个量程各点。当不确定度以相对形式表示(如材料试验机)时，通常选取整个量程最小点进行多次测量，计算相对实验标准差 $s_{rel}(x_i)$，用以代表整个量程各点。但也有例外的情况，如常规型橡胶国际硬度计的测量范围为(30～90)IRHD，其示值变动性最大的点往往出现在 60 IRHD，这时，实验标准差 $s(x_i)$ 的测定可选取在 60 IRHD 附近。有时，同一量程中不同点得到的实验标准差 $s(x_i)$ 相差可以比较大(如金属洛氏硬度计)，这时，不能用一个点的实验标准差去代替其他点。

【例 5-1】 对一等标准活塞压力计的活塞有效面积进行检定。在各种压力下测得 10 次活塞有效面积 S_0 与工作基准活塞面积 S_s 之比 l_i 如下：

0.250 670　　　　0.250 673

0.250 670　　　　0.250 671

0.250 675	0.250 671
0.250 675	0.250 670
0.250 673	0.250 670

则其最佳估计值 $\bar{l}$ 为

$$\bar{l}=\frac{\sum l_i}{n}=\frac{\sum l_i}{10}=0.250\ 672$$

由贝塞尔公式求得单次测量标准差 $s(l_i)$ 为

$$s(l_i)=\sqrt{\frac{\sum(l_i-\bar{l})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{38\times10^{-12}}{10-1}}=2.05\times10^{-6}$$

l 由测量重复性导致的标准不确定度 $u_1(l)$ 为

$$u_1(l)=s(\bar{l})=\frac{s(l_i)}{\sqrt{n}}=0.65\times10^{-6}$$

上面 $u_1(l)$ 是表示一等标准活塞压力计活塞有效面积 S_0 与工作基准活塞面积 S_s 之比 l 的由测量重复性引起的不确定度分量(还有其他分量，如工作基准活塞面积 S_s 的不确定度、加力砝码的质量、温度影响等)，由

$$l=\frac{S_0}{S_s}$$

得到由测量重复性引起的 S_0 的标准不确定度分量

$$u_1(S_0)=S_s\cdot u_1(l)=0.65\times10^{-6}S_s$$

以相对不确定度表示

$$u_{1\mathrm{rel}}(S_0)=\frac{S_s}{S_0}\cdot u_1(l)=\frac{0.65\times10^{-6}}{0.250\ 672}=2.6\times10^{-6}$$

二、测量过程的合并样本标准差

对于一个测量过程，若采用核查标准或控制图的方法使其处于统计控制状态，则该测量过程的合并样本标准差 s_p 为

$$s_p=\sqrt{\frac{\sum s_i^2}{k}} \tag{5-14}$$

式中 s_i 为每次核查时的样本标准差；k 为核查次数。当每次核查，其自由度相同时，式(5-14)成立。合并样本标准差 s_p 为测量过程长期的组内标准差的平方平均值的正平方根。在此情况下，由该测量过程对被测量 X 进行 n 次观测，以算术平均值作为测量结果时，其标准不确定度 $u(x)$ 为

$$u(x)=\frac{s_p}{\sqrt{n}} \tag{5-15}$$

【例 5-2】 量块的测量保证方案。为使实验处于控制状态，实验室要用

核查标准随时检查工作。现以核查标准量块建立单个量块的标准差。其中第 i 次核查时的样本标准差 s_i 为

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(L_{ij} - L_i)^2}$$

式中 L_{ij} 为第 i 次核查的第 j（$j=1, 2, \cdots, n$）个测量值（指与量块标称值的偏差）；$L_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}/n$。设 k 为核查次数，则合并样本标准差 s_p 为

$$s_p = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} s_i^2}$$

现对 90mm 量块进行重复测量，核查次数 $k=2$。

①第一次核查时测量值 L_{1j} 如下：

0.250μm，0.236μm，0.213μm，0.212μm，0.221μm，0.220μm

算得 L_{1j} 的算术平均值 L_1 及单次测量标准差 s_1 分别为

$$L_1 = \frac{\sum_{j=1}^{6} L_{1j}}{6} = 0.225\mu\text{m}$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{6-1}\sum_{j=1}^{6}(L_{1j} - L_1)^2} = 0.015\mu\text{m}$$

②第二次核查时测量值 L_{2j} 如下：

0.248μm，0.236μm，0.210μm，0.222μm，0.225μm，0.228μm

算得 L_{2j} 的算术平均值 L_2 及单次测量标准差 s_2 分别为

$$L_2 = \frac{\sum_{j=1}^{6} L_{2j}}{6} = 0.228\mu\text{m}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{6-1}\sum_{j=1}^{6}(L_{2j} - L_2)^2} = 0.013\mu\text{m}$$

故核查二次（$k=2$）的合并样本标准差 s_p 为

$$s_p = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{0.015^2 + 0.013^2}{2}}\mu\text{m} = 0.014\mu\text{m}$$

若以 s_p 作为核查标准，考查任一次测量，测量次数 $n=6$，则标准不确定度 $u(x)$ 为

$$u(x) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{0.014}{\sqrt{6}} = 0.006\ 4\mu\text{m}$$

L_1 和 L_2 的实验标准差非常接近，表征被测量处于统计控制状态；平均值 L_1 和 L_2 之差反映了被测量的漂移，是衡量被测量的另一个重要参数指标。

采用合并样本标准差的方法可以核查标准是否处于控制状态，还可以得到自由度比较高的标准不确定度，在这里，实验标准差的值并没有明显的变化，但可靠性却提高了。

三、规范测量中的合并样本标准差

所谓规范测量，指明确规定了程序、条件的测量，例如按测量仪器检定规程进行的检定，按给定技术规范对样品某参数的测量。认定测量处于统计控制状态下时，可认为被测量 X 的单次测量结果 x_i 的标准差 $s(x_i)$ 相等。通过累积下来的测量结果，计算出自由度充分大的合并样本标准差 $s_p(x)$，以用于每次测量结果的评定。

①若 m 个被测量 X_i 在重复性条件下，均进行了 n 次独立观测，测值分别为 x_{i1}，x_{i2}，…，x_{in}，其平均值为 $\bar{x}_i$，则可得合并样本标准差 s_p 为

$$s_p=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}s_i^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{m(n-1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2} \tag{5-16}$$

自由度为 $\nu=m(n-1)$

②若 m 个被测量重复的次数不完全相同，设各为 n_i，X_i 的标准差 $s(x_i)$ 的自由度分别为 $\nu_i=(n_i-1)$，通过 m 个 s_i 与 ν_i 可得 s_p 为

$$s_p=\sqrt{\frac{\sum\nu_i s_i^2}{\sum\nu_i}} \tag{5-17}$$

自由度为

$$\nu=\sum_{i=1}^{m}\nu_i$$

例如：对某量每次测量时，重复观测 6 次($n=6$)，对这样的量，我们测了 10 个($m=10$)，即对 10 个被测量各进行了 6 次观测。在记录中，可以得出 6×10 个残差，其平方和除以 $m(n-1)$，即为合并样本方差 $s_p^2(x)$，自由度 $\nu=m(n-1)=50$。

如果已算出各次标准差 s_i(通过 $n=6$，按贝塞尔公式算出)，则可用这 m 个已算出的样本方差之和的平均值作为 $s_p^2(x)$，自由度仍为 $m(n-1)$。

如果每次测量的观测次数不同，但均已算出各次标准差 s_i，则可对这 m 个 s_i 按加权平均的方法计算 $s_p^2(x)$，自由度为 $\sum\nu_i$。

推而广之，可以把合并样本标准差应用到性质相同的不同观测结果，比如依据检定规程，对一台仪器覆盖整个量程均匀分布的 10 个点检定

($m=10$)，每个点测量2次($n=2$)，当各点2次测量值所得到的实验标准差s_i没有明显的差异和规律性变化时，可以用合并样本标准差的方法，得到各受检点由测量重复性引起的不确定度。

每个点单次测量结果的标准不确定度

$$u(x_i)=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}s_i^2} \tag{5-18}$$

每个点n次测量平均值的测量结果标准不确定度

$$u(\bar{x})=\sqrt{\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}s_i^2} \tag{5-19}$$

上面标准不确定度的自由度为$\nu=m(n-1)=10$。这里，每个检定点贡献1个独立的残差。

当有的试验只能得到一个观测值时，可考虑用两台型号、准确度完全相同的仪器同时进行测量，由两台仪器的测量结果作为一组数，并进行多组试验再合并标准差。

四、不确定度A类评定的独立性

在重复性条件下所得的测量列的不确定度，通常比用其他评定方法所得到的不确定度更为客观，并具有统计学的严格性，但要求有充分的重复次数。此外，这一测量程序中的重复观测值，应相互独立。例如：

①被测量是一批材料的某一特性，所有重复观测值来自同一样品，而取样又是测量程序的一部分，则观测值不具有独立性，必须把不同样本间可能存在的随机差异导致的不确定度分量考虑进去；

②测量仪器的调零是测量程序的一部分，重新调零应成为重复性的一部分；

③通过直径的测量计算圆的面积，在直径的重复测量中，应随机地选取不同的方向观测；

④当使用测量仪器的同一测量段进行重复测量时，测量结果均带有相同的这一测量段的误差，而降低了测量结果间的相互独立性；

⑤在一个气压表上重复多次读取示值，把气压表扰动一下，然后让它恢复到平衡状态再进行读数，因为即使大气压力并无变化，还可能存在示值和读数的误差。

在介绍不确定度来源时，我们知道各不确定度来源可能相关，不确定度来源中的任何一项都可能影响到另外一项，即在相同条件下被测量在重复观测中的变化，这一项通常采用A类评定的方法。所以A类不确定度评

定不仅要注意不要把影响量遗漏，更要注意影响量的相互独立，不要重复计算。

影响量的相互影响有时是难免的，所以有时也可能出现重复计算，例如标准量块的校准中，量块长度差的实验标准差可能已包含了比较仪的随机效应。但当这些量对合成标准不确定度的贡献比较大时，应考虑把重复计算的影响量扣除，如采用标准洛氏硬度块检定金属洛氏硬度计，硬度块的均匀性既影响到硬度块的不确定度，又影响到硬度计的测量重复性，而且影响相当大，这时要注意不能重复计算。

五、阿伦方差

如采被测量随时间或空间的变化呈随机性，则可采用专门的方差分析方法求得其标准差。例如在频率稳定度的测量方面，由于闪烁噪声对振荡器的影响，若用贝塞尔公式估计其标准差，则不收敛，即随着取样次数 n 的增大，标准差也增大。因此，对频率随机起伏的参量，频率稳定度的测量采用阿伦方差的方法。

设对被测量频率进行 $m+1$ 次测量，每次测量的取样时间为 τ，以每两次测量为一组，其测量值分别为 y_i 和 y_{i-1}，则由式(5-20)求得的方差称为阿伦方差。

$$s_y^2(\tau)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}[y_{i+1}(\tau)-y_i(\tau)]^2 \qquad (5\text{-}20)$$

频率稳定度测量的标准差为 $s_y(\tau)=[s_y^2(\tau)]^{1/2}$。

六、A 类不确定度评定的自由度和评定流程

1. A 类不确定度评定的自由度

对于 A 类评定，各种情况下的自由度为：

(1) 用贝塞尔公式计算实验标准差时，若测量次数为 n，则自由度 $\nu=n-1$。

(2) 当同时测量 t 个被测量时，自由度 $\nu=n-t$。

(3) 对于合并样本标准差 s_p，其自由度为各组的自由度之和。例如，对于每组测量 n 次，共测量 m 组的情况，其自由度为 $m\times(n-1)$。

(4) 当用极差法估计实验标准差时，其自由度与测量次数 n 的关系见表 5-2。

表 5-2　极差法自由度表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
ν	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.3	6.0	6.8	7.5	10.5	13.1

比较贝塞尔法和极差法的自由度，就可以发现在相同测量次数的条件下，极差法的自由度比贝塞尔法小。这就是说，用极差法得到的实验标准差的准确度比贝塞尔法低。由于极差法没有有效利用所提供的全部信息量，其准确程度较差也是必然的。

2. A 类不确定度评定的流程图

总结以上所述，可用图 5-1 简明地表示出标准不确定度 A 类评定的流程。

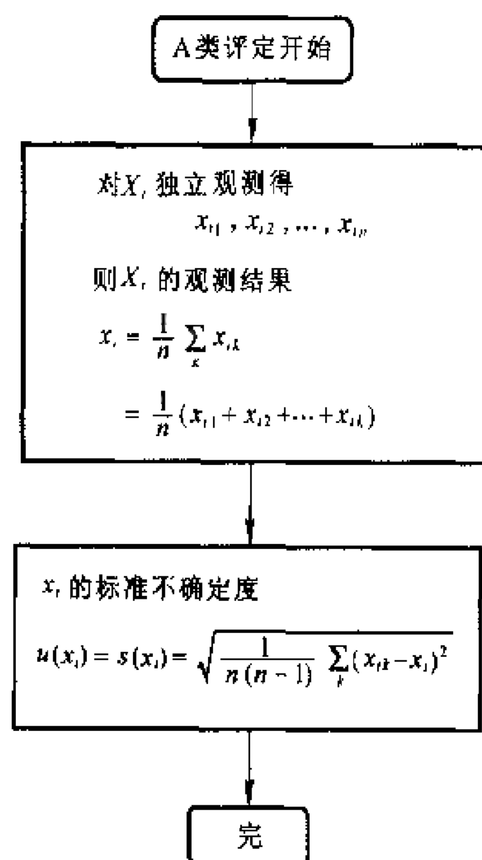


图 5-1　标准不确定度 A 类评定流程图

第三节　标准不确定度的 B 类评定

一、B 类不确定度评定的信息来源

如果实验室拥有足够多的时间和资源，我们就可以对不确定度的每个

了解到的原因进行详尽的统计研究。譬如，采用各种不同类型的仪器、不同的测量方法、方法的不同应用以及测量理论模型的不同近似等。于是，所有这些不确定度分量就可用观测列的统计标准差来表征。换言之，所有不确定度分量可以用A类评定得到。然而，这样的研究并非经济可行，很多不确定度分量实际上还必须用别的方法来评定。

当被测量X的估计值x_i不是由重复观测得到，其标准不确定度$u(x_i)$可用x_i的可能变化的有关信息或资料来评定。

B类评定的信息来源有以下六项：

①以前的观测数据；

②对有关技术资料和测量仪器特性的了解和经验；

③生产部门提供的技术说明文件；

④校准证书、检定证书或其他文件提供的数据、准确度的等别或级别，包括目前暂在使用的极限误差等；

⑤手册或某些资料给出的参考数据及其不确定度；

⑥规定实验方法的国家标准或类似技术文件中给出的重复性限r或复现性限R。用这类方法得到的估计方差$u^2(x_i)$，可简称为B类方差。

对B类评定的不确定度，给出其标准不确定度的主要信息来源为各种标准和规程等技术性文件对产品和材料性能的规定，生产部门提供的技术说明文件，有时还来源于测量人员对有关技术资料和测量仪器特性的了解和经验。因此，在测量不确定度的B类评定中，往往会在一定程度上带有某种主观的因素，如何恰当并合理地给出B类评定的标准不确定度是测量不确定度评定的关键问题之一。

二、B类不确定度的评定方法

1. 已知置信区间和包含因子

根据经验和有关信息或资料，先分析或判断被测量值落入的区间$[\bar{x}-a, \bar{x}+a]$，并估计区间内被测量值的概率分布，再按置信水准p来估计包含因子k，则B类标准不确定度$u(x)$为

$$u(x)=\frac{a}{k} \tag{5-21}$$

式中：a——置信区间半宽；

k——对应于置信水准的包含因子。

2. 已知扩展不确定度U和包含因子k

如估计值x_i来源于制造部门的说明书、校准证书、手册或其他资料，其

中同时还明确给出了其扩展不确定度$U(x_i)$是标准差$s(x_i)$的k倍，指明了包含因子k的大小，则标准不确定度$u(x)$可取$U(x_i)/k$，而估计方差$u^2(x_i)$为其平方。

例如校准证书上指出标称值为1kg的砝码的实际质量m= 1 000.000 32g，并说明按包含因子$k=3$给出的扩展不确定度$U=0.24\text{mg}$。则该砝码的标准不确定度为$u(m)=0.24\text{mg}/3=80\mu\text{g}$，估计方差为$u^2(m_i)=(80\mu\text{g})^2=6.4\times10^{-9}\text{g}^2$。相应的相对标准不确定度为

$$u_{\text{rel}}(m)=u(m)/m=80\times10^{-9}$$

在这个例子中，砝码使用其实际值1 000.000 32g，而不使用其标称值，即砝码是以"等"使用。评定出的标准不确定度80μg是1 000.000 32g的标准不确定度。

3. 已知扩展不确定度U_p和置信水准p的正态分布

如x_i的扩展不确定度不是按标准差$s(x_i)$的k倍给出，而是给出了置信水准p和置信区间的半宽U_p，除非另有说明，一般按正态分布考虑评定其标准不确定度$u(x_i)$。

$$u(x_i)=\frac{U_p}{k_p} \tag{5-22}$$

正态分布的置信水准(置信概率)p与包含因子k_p之间存在着表5-3所示的关系。

表5-3　正态分布情况下置信水准p与包含因子k_p间的关系

p(%)	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
k_p	0.67	1	1.645	1.960	2	2.576	3

这种情况在以"等"使用的仪器中出现最多，例如使用某一等量块，我们可以查到该等别量块的扩展不确定度U_{99}与量块的标称值L有一个关系式，通过表5-3和式(5-22)就可以计算出量块的标准不确定度。

例如，校准证书上给出标称值为10Ω的标准电阻器的电阻R_s在23℃时为

$$R_s(23℃)=(10.000\,74\pm0.000\,13)\Omega$$

同时说明置信水准$p=99\%$。

由于$U_{99}=0.13\text{m}\Omega$，按表5-1，$k_p=2.58$，其标准不确定度为$u(R_s)=0.13\text{m}\Omega/2.58=50\mu\Omega$，估计方差为$u^2(R_s)=(50\mu\Omega)^2=2.5\times10^{-9}\Omega^2$。相应的相对标准不确定度为

$$u_{rel}(R_s)=u(R_s)/R_s=5\times10^{-6}$$

如根据所获得的资料表明，输入量 X_i 的值有 50%的概率落于 a_- 和 a_+ 的区间内。取 X_i 的最佳估计值 x_i 为该区间的中点。设该区间的半宽为 $(a_+-a_-)/2=a$。在假设 X_i 的可能值接近正态分布的前提下，由表 5-3 知 $k_{50}=0.67$，则取 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)=a/0.67$，其方差为 $u^2(x_i)=(a/0.67)^2$。

例如机械师在测量零件尺寸时，估计其长度以 50% 的概率落于 10.07mm 至 10.15mm 之间，并给出了长度 $l=(10.11\pm0.04)$mm，这说明 0.04mm 为 $p=50\%$的置信区间半宽，在接近正态分布的条件下，按表 5-3，$k_{50}=0.67$，则长度 l 的标准不确定度为 $u(l)=0.04\text{mm}/0.67=0.06\text{mm}$，其方差为 $u^2(l)=(0.04/0.67)^2=3.6\times10^{-3}\text{mm}^2$。

如已知信息表明 X_i 之值接近正态分布，并以 0.68 概率落于 $(a_+-a_-)/2=a$ 的对称范围之内，由表 5-3 知 $k_p=1$，则 $u(x_i)=a$。

4. 已知扩展不确定度 U_p 以及置信水准 p 与有效自由度 ν_{eff} 的 t 分布

若 x_i 的扩展不确定度不仅给出了扩展不确定度 U_p 和置信水准 p，而且给出了有效自由度 ν_{eff} 或包含因子 k_p，这时必须按 t 分布处理。

$$u(x_i)=\frac{U_p}{t_p(\nu_{eff})} \tag{5-23}$$

这种情况提供给不确定度评定的信息比较齐全，常出现在标准仪器的校准证书上。

例如，校准证书上给出标称值为 5kg 的砝码的实际质量为 $m=5000.078$g，并给出了 m 的测量结果扩展不确定度 $U_{95}=48$mg，有效自由度 $\nu_{eff}=35$。

查 t 分布表可得知 $t_{95}(35)=2.03$，故 B 类标准不确定度为

$$u(x_i)=\frac{U_{95}}{t_{95}(\nu_{eff})}=\frac{48}{2.03}=24\text{mg}$$

5. 其他几种常见的分布

除了正态分布和 t 分布以外，其他常见的分布有均匀分布、反正弦分布、三角分布、梯形分布及两点分布等。

如已知信息表明 X_i 之值 x_i 分散区间的半宽为 a，且 x_i 落于 x_i-a 至 x_i+a 区间的概率 p 为 100%，即全部落在此范围中，通过对其分布的估计，可以得出标准不确定度 $u(x_i)=a/k$，因为 k 与分布状态有关(见表 5-4)。

表 5-4　常用分布与 k, $u(x_i)$ 的关系

分布类型	p(%)	k	$u(x_i)$
正态	99.73	3	$a/3$
三角	100	$\sqrt{6}$	$a/\sqrt{6}$
梯形 $\beta=0.71$	100	2	$a/2$
矩形(均匀)	100	$\sqrt{3}$	$a/\sqrt{3}$
反正弦	100	$\sqrt{2}$	$a/\sqrt{2}$
两点	100	1	a

表 5-4 中 β 为梯形的上底与下底之比，对于梯形分布来说，$k=\sqrt{6/(1+\beta^2)}$，特别当 β 等于 1 时，梯形分布变为矩形分布；当 β 等于 0 时，变为三角分布。

例如手册中给出纯铜在 20℃时的线膨胀系数 α_{20}(Cu)为 $16.52\times10^{-6}℃^{-1}$，并说明此值变化的半范围为 $a=0.40\times10^{-6}℃^{-1}$。按 α_{20}(Cu)在 $[(16.52-0.40)\times10^{-6}℃^{-1}, (16.52+0.40)\times10^{-6}℃^{-1}]$区间内为均匀分布，于是

$$u(\alpha)=0.40\times10^{-6}℃^{-1}/\sqrt{3}=0.23\times10^{-6}℃^{-1}$$

例如数字电压表制造厂说明书说明：仪器校准后 1～2 年内，在 1V 内示值最大允许误差的模为 $14\times10^{-6}\times$(读数)$+2\times10^{-6}\times$(范围)。设校准后 20 月在 1V 内测量电压，在重复性条件下独立测得电压 V，其平均值为

$$\overline{V}=0.928\ 571\text{V}$$

平均值的实验标准差为　　　　$s(\overline{V})=12\mu\text{V}$

电压表最大允许误差的模为

$$a=14\times10^{-6}\times0.928\ 571\text{V}+2\times10^{-6}\times1\text{V}=15\mu\text{V}$$

a 即为均匀分布的半宽，按表 5-4，$k=\sqrt{3}$，则示值误差的标准不确定度为

$$u(\Delta V)=15\mu\text{V}/\sqrt{3}=8.7\mu\text{V}$$

由示值不稳定性导致的不确定度为 A 类标准不确定度，即 $s(\overline{V})=12\mu\text{V}$，由示值误差导致的标准不确定度为 B 类标准不确定度，即 $u(\Delta V)=8.7\mu\text{V}$。

在缺乏任何其他信息的情况下，一般估计为矩形分布是较合理的。但如果已知被研究的量 X_i 的可能值出现在 a_- 至 a_+ 中心附近的概率，大于接近区间的边界时，则最好按三角分布计算。如果 x_i 本身就是重复性条件下的几个观测值的算术平均值，则可估计为正态分布。三角分布是均匀分布和正态分布之间的一种折衷。

在不确定度的 B 类评定方法中，我们遇到的一个问题是，如何假设其

概率分布。根据概率论的"中心极限定理"，尽管被测量的值 X_i 的概率分布是任意的，但只要测量次数足够多，其算术平均值的概率分布为近似正态分布。如果被测量受许多个相互独立的随机影响量的影响，这些影响量变化的概率分布各不相同，但每个变量影响均很小时，被测量的随机变化将服从正态分布。如果被测量既受随机影响又受系统影响，而又对影响量缺乏任何其他信息的情况下，一般假设为均匀分布。有些情况下，可采用同行的共识，如微波测量中的失配误差为反正弦分布等。B 类不确定度评定的可靠性取决于可利用的信息的质量，在可能情况下应尽量充分利用长期实际观测的值来估计其概率分布。

6. 界限不对称的考虑

在输入量 X_i 可能值的下界 a_- 和上界 a_+ 相对于其最佳估计值 x_i 不对称的情况下，即下界 $a_-=x_i-b_-$，上界 $a_+=x_i+b_+$，其中 $b_-\neq b_+$。这时由于 x_i 不处于 a_- 至 a_+ 区间的中心，X_i 的概率分布在此区间内不会是对称的，在缺乏用于准确判定其分布状态的信息时，按矩形分布处理可采用下列近似评定：

$$u^2(x_i)=\frac{(b_++b_-)^2}{12}=\frac{(a_+-a_-)^2}{12} \tag{5-24}$$

例如，设手册中给出的铜膨胀系数 $\alpha_{20}(\mathrm{Cu})=16.52\times10^{-6}℃^{-1}$，但指明最小可能值为 $16.40\times10^{-6}℃^{-1}$，最大可能值为 $16.92\times10^{-6}℃^{-1}$。这时，

$$b_-=(16.52-16.40)\times10^{-6}℃^{-1}=0.12\times10^{-6}℃^{-1}$$

$$b_+=(16.92-16.52)\times10^{-6}℃^{-1}=0.40\times10^{-6}℃^{-1}$$

由式(5-24)得

$$u(\alpha_{20})=0.15\times10^{-6}℃^{-1}$$

有时对于不对称的界限，可以对估计值 x_i 加以修正，修正值的大小为 $(b_+-b_-)/2$，则修正后 x_i 就在界限的中心位置 $x_i=(a_++a_-)/2$，而其半宽为 $(a_+-a_-)/2$，从而可按前面所述的方式处理。

数字显示式测量仪器，如其分辨力为 δ_x，量化误差是一个宽度为 δ_x 的矩形分布，区间的半宽为 $\delta_x/2$。则有

$$u(x)=\frac{\delta_x}{2\sqrt{3}}=0.29\delta_x$$

虽然量化误差不一定对称分布，但一般都作为对称处理。

对于量值修约问题，如修约间隔为 δ_x，修约误差是一个宽度为 δ_x 的矩形分布，区间的半宽为 $\delta_x/2$。则有

$$u(x)=\frac{\delta_x}{2\sqrt{3}}=0.29\delta_x$$

如果量值修约是根据 GB 3103—1993 的规定进行的，那么修约引起的误差分布是完全对称的均匀分布。

7. 由重复性限或复现性限求不确定度

在规定实验方法的国家标准或类似技术文件中，按规定的测量条件，当明确指出两次测量结果之差的重复性限 r 或复现性限 R 时，如无特殊说明，则测量结果标准不确定度为

$$u(x_i)=r/2.83 \text{ 或 } u(x_i)=R/2.83$$

这里，重复性限 r 或复现性限 R 的置信水准为 95%，并作为正态分布处理。

由于

$$Y=X_1-X_2$$

式中 X_1 与 X_2 为服从同一正态分布的随机变量，由不确定度传播律得

$$u^2(Y)=u^2(X_1)+u^2(X_2)=2u^2(X)$$

故

$$u(Y)=\sqrt{2}u(x_i)$$

由置信水准 $p=95\%$ 得

$$U(Y)=2\sqrt{2}u(x_i)$$

故

$$u(x_i)=\frac{U(Y)}{2\sqrt{2}}=\frac{r}{2\sqrt{2}}=r/2.83$$

8. 以“等”使用的仪器的不确定度计算

当测量仪器检定证书上给出准确度等别时，可按检定系统或检定规程所规定的该等别的测量不确定度的大小，按上述第 2 或第 3 的方法计算标准不确定度分量。当检定证书既给出扩展不确定度，又给出有效自由度时，按第 4 方法计算。

以“等”使用仪器的不确定度计算一般采用正态分布或 t 分布。

对于以“等”使用的仪器，上面计算所得到的不确定度分量已包含了其上一个等别仪器所使用等别的仪器进行检定或校准带来的不确定度，因此，上一等别检定或校准的不确定度不需考虑。

以“等”使用的指示类仪器，使用时要对示值进行修正或使用校准曲线；量具要使用其实际值。所以要考虑仪器长期稳定性的影响，通常把两次检定或校准周期之间的差值，作为不确定度的一个分量，除非上一次证书给出的不确定度已考虑了这个问题。

以“等”使用的仪器，使用时的环境条件偏离参考条件或上一级检定或校准的环境条件时，要考虑环境条件引起的不确定度分量。

9. 以“级”使用仪器的不确定度计算

当测量仪器检定证书上给出准确度级别时，可按检定系统或检定规程所规定的该级别的最大允许误差进行评定。假定最大允许误差为$\pm A$，一般采用均匀分布，得到示值允差引起的标准不确定度分量

$$u(x)=\frac{A}{\sqrt{3}}$$

以“级”使用的仪器，上面计算所得到的不确定度分量并没有包含上一个级别仪器对所使用级别仪器进行检定带来的不确定度，因此，当上一级别检定的不确定度不可忽略时，还要考虑这一项不确定度分量。

以“级”使用的指示类仪器，使用时直接使用其示值而不需要进行修正；量具使用其标称值。所以可以认为仪器的示值允差中已包含了仪器长期稳定性的影响，不必要考虑仪器长期稳定性引起的不确定度。

以“级”使用的仪器，使用时环境条件只要不超出允许使用范围，仪器的示值误差始终没有超出示值允差的要求，在这种情况下，不必考虑环境条件引起的不确定度分量。

三、B类不确定度评定的自由度及其意义

对于A类评定不确定度，若已知重复测量次数就可以得到自由度，同时还可以计算出标准不确定度的相对标准不确定度。

对于B类评定，其标准不确定度并不是由实验测量得到的，也就不存在测量次数的问题，因此原则上也就不存在自由度的概念。但如果将该关系式借用到B类评定中，即认为该式同样适用于B类评定不确定度，则该式就成为估计B类评定不确定度自由度的基础。对于A类评定，从测量次数立即可以得到自由度，并可以得到标准不确定度$u(y)$的可靠程度，即$u(y)$的相对标准不确定度。B类评定不确定度的情况正好相反，我们可以反方向利用式2-57，如果根据经验能估计出B类评定不确定度的相对标准不确定度时，则就可以由式2-57估计出B类评定不确定度的自由度。

B类不确定度分量的自由度与所得到的标准不确定度以及$u(x_i)$的相对标准不确定度$\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$有关，其关系为

$$\nu_i\approx\frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]}\approx\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \tag{5-25}$$

式中，$\sigma[u(x_i)]$是$u(x_i)$的标准差，即$\sigma[u(x_i)]$是标准差的标准差，不确定度的不确定度。

根据经验，按所依据的信息来源的可信程度来判断 $u(x_i)$ 的标准不确定度，从而推算出比值 $\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$。按式(5-25)计算出的 ν_i 列于表5-5。

表 5-5 $\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$ 与 ν_i 关系

$\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$	ν_i	$\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$	ν_i
0	∞	0.30	6
0.10	50	0.40	3
0.20	12	0.50	2
0.25	8		

无论B类评定还是A类评定，自由度越大，不确定度的可靠程度越高，不确定度是用来衡量测量结果的可靠程度，自由度则是用来衡量不确定度的可靠程度，所以可以说自由度是一种二次或二阶不确定度。

应该说明的是：公式 $\nu_i=\frac{1}{2}\left\{\frac{u(x_i)}{\sigma[u(x_i)]}\right\}^2$ 不仅仅适用于正态分布，还适合于其他任何分布的情况。

所以，不确定度的B类评定，除了要设定其概率分布，还要设定评定的可靠程度。这要靠经验并对有关知识有深刻的了解。这是一门技巧，要靠实践积累。下面举一些例子予以说明。

当不确定度的评定有严格的数字关系，如数显仪器量化误差和数据修约引起的不确定度计算，自由度为∞。

当计算不确定度的数据来源于校准证书、检定证书或手册等比较可靠资料时，可取较高自由度。

当不确定度的计算带有一定主观判断因素，如指示类仪器的读数误差引起的不确定度，可取较低的自由度。

当不确定度的信息来源难以用有效的实验方法验证，如量块检定时标准量块和被检量块的温度差的不确定度，自由度可以非常低。

不要认为把不确定度的可能值估大了，即把影响量的可能半宽放宽后，可能值完全落在区间中，就可以提高可靠性，从而提高自由度。其实不确定度估大或估小了，都会降低自由度，只有估准了才有高自由度。

四、B类标准不确定度评定的流程

总结以上所述，可用图5-2简明地表示出标准不确定度B类评定的流程。

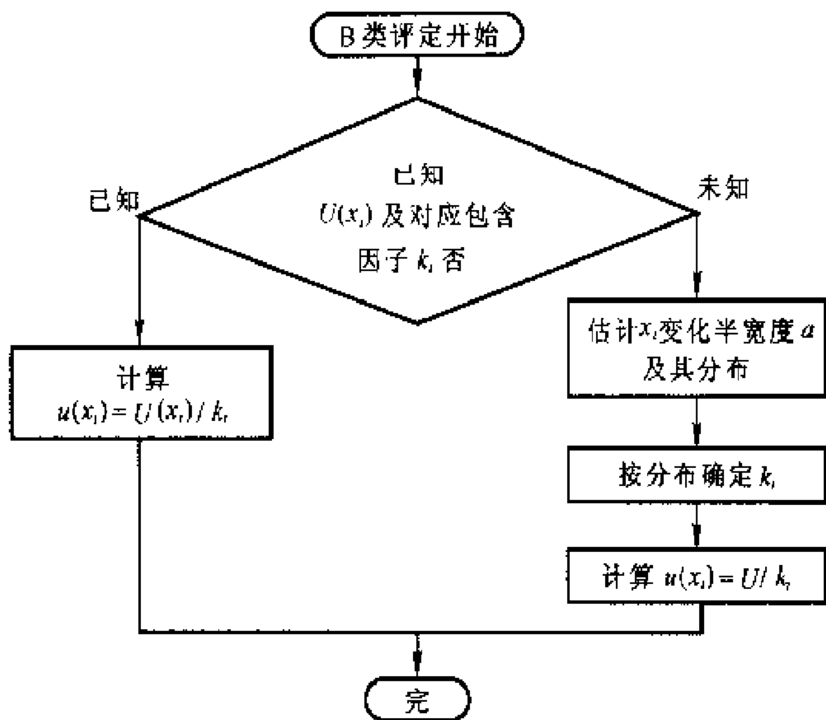


图 5-2　标准不确定度 B 类评定流程图

第四节　合成标准不确定度的评定

被测量 Y 的估计值 y 的标准不确定度，由相应输入量 x_1，x_2，…，x_N 的标准不确定度适当合成求得，估计值 y 的合成标准不确定度记为 $u_c(y)$，它表征合理赋予被测量估计值 y 的分散性。

一、输入量不相关时不确定度的合成

(1) 当全部输入量 X_i 是彼此独立或不相关时，合成标准不确定度 $u_c(y)$由式(5-26)求得

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \tag{5-26}$$

式中：f——被测量 y 与诸直接测得量 x_i 的函数关系；

$u(x_i)$——或是 A 类评定标准不确定度，或是 B 类评定标准不确定度。

不确定度 $u_c(y)$是一个估计标准差，它表征合理赋予被测量 Y 的分散性。式(5-26)及下面对应相关输入量的式(5-30)，两者都基于 $Y=f(X_1, X_2, \cdots, X_N)$的泰勒级数一阶近似，称为不确定度传播律。

这里，当 f 非线性显著时，$u_c^2(y)$表达式(5-26)中应考虑计入泰勒级数展开的高阶项。特别当各 X_i 分布对称，式(5-26)需要增加的下一个重要的高阶项为

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right\}u^2(x_i)u^2(x_j)$$

当函数 $y=f(x_i)$ 完全线性时，二阶以上偏导数为零，因此不必考虑泰勒级数展开的高阶项。

(2) $\partial f/\partial x_i$ 是函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 在 $X_i=x_i$ 时的偏导数，这些偏导数称为灵敏系数，符号为 c_i，即 $c_i=\partial f/\partial x_i$。它表示了输出估计值 y 随输入估计值 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 的变化而变化的程度。特别是当输入估计值 x_i 有微小的变化 Δx_i 时，输出估计值 y 的相应变化 $(\Delta y)_i=(\partial f/\partial x_i)\Delta x_i$。如果这个变化来自输入估计值 x_i 的标准不确定度，那么输出估计值 y 的相应变化就是 $(\partial f/\partial x_i)\Delta x_i$。因此，合成方差 $u_c{}^2(y)$ 可视为伴随各项输入分量 x_i 的估计方差而引起输出估计值 y 的估计方差。因此式(5-26)可表示为

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}[c_i u(x_i)]^2=\sum_{i=1}^{N}u_i^2(y) \tag{5-27}$$

式中

$$c_i=\partial f/\partial x_i \qquad u_i(y)=|c_i|u(x_i) \tag{5-28}$$

【例 5-3】 如果加在一个随温度变化的电阻两端的电压为 V，在温度为 t_0 时的电阻为 R_0，电阻的温度系数为 α，在温度 t 时电阻损耗的功率 P 为被测量，被测量 P 与 V, R_0, α 和 t 的函数关系为

$$P=f(V, R_0, \alpha, t)=V^2/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\}$$

求测量结果 P 的合成标准不确定度。

解：

$$\begin{aligned}u_c^2(p)&=\left[\frac{\partial P}{\partial V}\right]^2u^2(V)+\left[\frac{\partial P}{\partial R_0}\right]^2u^2(R_0)+\left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right]^2u^2(\alpha)+\left[\frac{\partial P}{\partial t}\right]^2u^2(t)\\&=[c_1u(V)]^2+[c_2u(R_0)]^2+[c_3u(\alpha)]^2+[c_4u(t)]^2\\&=u_1^2(P)+u_2^2(P)+u_3^2(P)+u_4^2(P)\end{aligned}$$

式中：

$$c_1=\frac{\partial P}{\partial V}=2V/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\}=2P/V$$

$$c_2=\frac{\partial P}{\partial R_0}=-V^2/\{R_0^2[1+\alpha(t-t_0)]\}=-P/R_0$$

$$\begin{aligned}c_3=\frac{\partial P}{\partial \alpha}&=-V^2(t-t_0)/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\}\\&=-P(t-t_0)/[1+\alpha(t-t_0)]\end{aligned}$$

$$c_4=\frac{\partial P}{\partial t}=-V^2\alpha/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\}=-P\alpha/[1+\alpha(t-t_0)]$$

如果 $t_0=19.5$℃，输入量 V, R_0, α, t 的估计值分别为

$V=1\ 000.0\text{V}$，$R_0=1\ 000.0\Omega$，$\alpha=2\times10^{-5}℃^{-1}$，$t=21.5℃$

可求得被测量 P 的估计值为 $P=0.099\ 996\text{W}$，代入可求得

$$c_1=\frac{\partial P}{\partial V}=2\times0.099\ 996\text{W}/1\ 000\text{V}=0.199\ 992\text{mA}\approx0.2\text{mA}$$

$$c_2=\frac{\partial P}{\partial R_0}=-0.099\ 996\text{W}/1\ 000\Omega=-0.099\ 996\text{mW}/\Omega\approx-0.1\text{mW}/\Omega$$

$$c_3=\frac{\partial P}{\partial \alpha}=-0.099\ 996\text{W}(21.5℃-19.5℃)/[1+2\times10^{-5}℃^{-1}(21.5℃-19.5℃)]$$
$$=-0.199\ 984\text{W}\cdot℃\approx-0.2\text{W}\cdot℃$$

$$c_4=\frac{\partial P}{\partial t}=-0.099\ 996\text{W}(2\times10^{-5}℃^{-1})/[1+2\times10^{-5}℃^{-1}(21.5℃-19.5℃)]$$
$$=-0.001\ 999\ 2\ \text{mW}/℃\approx-0.002\ \text{mW}/℃$$

由于各分量互不相关，因而合成方差 $u_c^2(P)$ 为

$$u_c^2(P)=\left[\frac{\partial P}{\partial V}\right]^2u^2(V)+\left[\frac{\partial P}{\partial R_0}\right]^2u^2(R_0)+\left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right]^2u^2(\alpha)+\left[\frac{\partial P}{\partial t}\right]^2u^2(t)$$
$$=[c_1u(V)]^2+[c_2u(R_0)]^2+[c_3u(\alpha)]^2+[c_4u(t)]^2$$
$$=[0.2\text{mA}\cdot u(V)]^2+[(-0.1\text{mW}/\Omega)\cdot u(R_0)]^2+[(-0.2\text{W}\cdot℃)u(\alpha)]^2+[(-0.002\text{mW}/℃)\cdot u(t)]^2$$

需要说明的是，当随机效应或系统效应导致的分量既可按统计方法得到，也可按其他方法得到时，$u_c(y)$ 中只可包含其中之一。

(3) 如果函数关系不十分明确，或者需要进行验证，此时灵敏系数 c_i 也可由实验测定，即通过变化第 i 个 x_i，而保持其余输入量不变，并测定 Y 随 x_i 的改变量，从而计算出 c_i。

例如圆柱体积的函数式为

$$V=\pi r^2h$$

式中 r 为截面半径，h 为圆柱体的高。如果想通过实验测定灵敏系数 c_r，则保持高度 h 不变而改变半径 r，并测定体积 V 的改变量 ΔV，即可计算得 c_r。实际上，要做到 h 一点也不变是困难的。

(4) 如果将被测量

$$Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_N)$$

对输入量 X_i 的标称值 X_{i0} 作一阶展开

$$Y=Y_0+c_1\delta_1+c_2\delta_2+\cdots+c_N\delta_N$$

式中，$Y_0=f(X_{10},X_{20},\cdots,X_{N0})$；

$c_i=\partial f/\partial X_i$，即 $Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_N)$ 在 $X_i=X_{i0}$ 求导；

$$\delta_i = X_i - X_{i0}$$

为了分析不确定度，常将 X_i 变换到 δ_i，从而使被测量近似地为线性函数。

【例 5-4】 被测量电压的已修正的测量结果为 $V=\overline{V}+\Delta\overline{V}$，其中重复测量的算术平均值 $\overline{V}=0.928\ 571\text{V}$。A 类标准不确定度为 $u(\overline{V})=12\mu\text{V}$。修正值 $\Delta\overline{V}=0.01\text{V}$，修正值的标准不确定度由 B 类评定得到 $u(\overline{V})=8.7\mu\text{V}$。求 V 的合成标准不确定度。

解：

$$V=\overline{V}+\Delta\overline{V}$$

$$\partial V/\partial\overline{V}=1$$

$$\partial V/\partial(\Delta\overline{V})=1$$

则　$$u_c^2(V)=u^2(\overline{V})+u^2(\Delta\overline{V})=(12\mu\text{V})^2+(8.7\mu\text{V})^2=219.69\times10^{-12}\text{V}^2$$

合成标准不确定度

$$u_c(V)=\sqrt{219.69\times10^{-12}}\text{V}=15\mu\text{V}$$

相对合成标准不确定度

$$u_c(V)/V=16\times10^{-6}$$

这是被测量为输入量的线性函数，且系数 $c_i=+1$ 的例子。当被测量 Y 为相互独立的输入量 X_i 的线性函数

$$Y=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_NX_N$$

且常数 c_i 为 $+1$ 或 -1，则

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}u^2(x_i)$$

例如，$y=x_1+x_2$，且 x_1 与 x_2 不相关，$u(x_1)=1.73\text{mm}$，$u(x_2)=1.15\text{mm}$

则

$$u_c^2(y)=u^2(x_1)+u^2(x_2)$$

$$u_c=\sqrt{\sum u^2}=2.077\text{mm}\approx2.1\text{mm}$$

(5) X_i 彼此独立的条件下，如果函数 f 的形式表现为

$$Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_N)=cX_1^{p_1}X_2^{p_2}\cdots X_N^{p_N}$$

式中，系数 c 并非灵敏系数，指数 p_i 可以是正数、负数或分数，设 p_i 的不确定度 $u(p_i)$ 可忽略不计，则合成方差为

$$[u_c(y)/y]^2=\sum_{i=1}^{N}[p_iu(x_i)/x_i]^2 \tag{5-29}$$

这里，给出的是相对合成方差，式(5-29)说明在这一函数关系下，采用相对

标准不确定度 $u_{crel}=u_c(y)/|y|$ 和 $u_{rel}=u(x_i)/|x_i|$ 进行评定比较方便，但要求 $y\neq 0$ 和 $x_i\neq 0$。

而且，当 Y 具有这一函数形式时，可设 $X_i=X_{i,0}(1+\delta_i)$，从而实现将 Y 变换成线性函数，并得到以下近似关系

$$(Y-Y_0)/Y_0=\sum_{i=1}^{N}p_i\delta_i$$

另外，对数变换 $Z=\ln Y$ 和 $W_i=\ln X_i$ 可以使新的变量完全线性化为

$$Z=\ln c+\sum_{i=1}^{N}p_iW_i$$

如果，指数 p_i 只是+1或−1，式(5-29)就进一步简化为

$$[u_c(y)/y]^2=\sum_{i=1}^{N}[u(x_i)/x_i]^2 \tag{5-30}$$

即估计值 y 的相对方差等于输入值 x_i 的相对方差之和。

若 $y=x^n$，则

$$\frac{u_c(y)}{y}=n\frac{u(x)}{x}$$

即 y 为 x 的 n 次幂时，y 的相对不确定度等于 x 的相对不确定度的 n 倍。

例如立方体体积 V 的测量通过输入长 l、宽 b 和高 h，其函数关系为

$$V=f(l,b,h)=lbh$$

按式(5-30)可得

$$\left[\frac{u_c(V)}{V}\right]^2=\left[\frac{u_c(l)}{l}\right]^2+\left[\frac{u_c(b)}{b}\right]^2+\left[\frac{u_c(h)}{h}\right]^2$$

或写成

$$u_{crel}^2(V)=u_{rel}^2(l)+u_{rel}^2(b)+u_{rel}^2(h)$$

例如，圆柱体体积 V 的测量通过输入半径 r 与高 h，其函数关系为

$$V=\pi r^2h$$

式中，$u(\pi)$ 可通过取适当的有效位数而忽略不计，则按式(5-29)可得

$$u_{crel}^2(V)=2^2u_{rel}^2(r)+u_{rel}^2(h)$$

应当注意的是，必须满足 $Y=cX_1^{p_1}X_2^{p_2}\cdots X_N^{p_N}$ 的函数关系，式(5-29)才适用。

二、输入量相关时不确定度的合成

前述中仅当输入量 X_i 之间互不相关时才成立。如果一些量 X_i 之间明显相关时，就必须考虑其相关性。即使两个量 X_i，X_j 无真正关联，但在得到它们的估计值的过程中，某些因素可能使它们估计值 x_i，x_j 之间有某种关联，使得在不确定度处理时，仍要考虑它们之间的相关性。

若两输入量测定中，使用了具有显著不确定度的相同测量仪器、实物测量标准、参考数据，则两量间的相关性较为显著。如输入量 X_i 估计值的温度修正使用了某温度计，另一输入量 X_j 估计值的温度修正也用了同一温度计，则这两个输入量会显著相关。然而，在这个例子中，若重新确定 X_i 与 X_j 为不相关量，只需将温度计的不确定度作为附加输入量引入，则 X_i 与 X_j 间的相关性可以消去。

（一）输入量相关时的不确定度传播律

当输入量相关时，测量结果的合成方差 $u_c^2(y)$ 应表示为如下的不确定度传播律

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j) \quad (5\text{-}31)$$

式中：x_i，x_j；——X_i、X_j 的估计；

$u(x_i, x_j)$——x_i，x_j 的估计协方差，且 $u(x_i, x_j)=u(x_j, x_i)$。

x_i，x_j的相关程度可按估计相关系数 $r(x_i, x_j)$表示为

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad (5\text{-}32)$$

【例 5-5】 在同一测量中，标准电阻 R_0 用来决定电流 I 及温度 t，采用一数字电压表，测量跨于标准电阻两端电势差以决定电流。用一电阻电桥和标准电阻决定温度。测量被校电阻温度传感器的电阻 $R_0(t)$。在 15℃$\leqslant t \leqslant$30℃范围内，温度与电阻的关系为 $t=\alpha R_t^2(t)-t_0$，其中 α 与 t_0是已知常数。因此，电流由关系 $I=V_s/R_s$，温度由关系 $t=\alpha\beta^2(t)-t_0$ 决定，$\beta(t)$由电桥提供的测得比值 $R_t(t)/R_s$决定。

R_s 为 I 与 t 表达式所共有，因此 I 与 t 的协方差 $u(I, t)$为

$$u(I, t)=\frac{\partial I}{\partial R_s}\frac{\partial t}{\partial R_s}u^2(R_s)=-\frac{2I(t+t_0)}{R_s^2}u^2(R_s)$$

将标准电阻 R_s 证书所给出的 R_s 与 $u(R_s)$，测得值 I 与 t 代入上式，可得到 I 与 t 的协方差值。

如果量 p 与输入量 I 与 t 的关系为 $p=C_0I^2/(T_0+t)$，其中 C_0、T_0 为已知常数，其不确定度可以忽略不计，则由不确定度传播律，采用相对形式有

$$\frac{u^2(p)}{p^2}=4\frac{u^2(I)}{I^2}+\frac{u^2(t)}{(T_0+t)^2}-4\frac{u(I, t)}{I(T_0+t)}$$

由 I，t 表达式，可求出 I，t 的相对标准不确定度，继而得到 p 的相对合成

标准不确定度。

如将 I，t 表达式引入到 p 的表达式中，有

$$p=\frac{C_0V_s^2}{R_s^2[T_0+\alpha\beta^2(t)R_s^2-t_0]}$$

输入量 I，t 以 V_s，R_s，β 代替后，I，t 之间的相关性就被避免了。

（二）相关系数的求法

两输入量 X，Y 的估计相关系数以 $r(X,Y)$ 表示，取值范围是 $-1\leqslant r(X,Y)\leqslant 1$。$r(X,Y)$ 可用以下公式计算。

1. 统计法

$$r(X,Y)=\frac{\sum(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum(X_i-\overline{X})^2\cdot\sum(Y_i-\overline{Y})^2}} \tag{5-33}$$

2. 物理(实验)判断法

(1) 对于 $r(X,Y)=0$，即 X，Y 不相关，有下面几种情况：

①X，Y 不相关；

②X，Y 属于不同体系的分量，如人员引起的不确定度分量与温度影响的不确定度分量；

③$r(X,Y)$ 在 $[-1,1]$ 上对称分布，取 $r(X,Y)=0$；

④X，Y 弱相关，近似取 $r(X,Y)=0$。

(2) 对于 $r(X,Y)=1$ 即两分量完全正相关，有下面几种情况：

①X，Y 呈线性或近似线性关系；

②X，Y 属于同一体系的分量，如用 1m 基线尺测两个 1m 的长度，则各米分量之间完全正相关；

③一分量增大或减小，引起另一分量增大或减小；

④若知 X，Y 相关，可近似取 $r(X,Y)=1$。

一般情况下(非理想状态)，用统计法得到相关系数是困难的，在经验知识充分时，若判断 X，Y 弱相关，可近似取 $r(X,Y)=0$；若判断 X，Y 强相关，则可近似取 $r(X,Y)=1$ 或 $r(X,Y)=-1$。

当 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，所有的输入估计值相关，且相关系数 $r(x_i,x_j)=1$，则合成标准不确定度 $u_c(y)$ 为

$$u_c(y)=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]u(x_i) \tag{5-34}$$

即为分量不确定度的线性和。

【例 5-6】 当标称值均为 1kΩ 的 10 个电阻器，用同一个值为 R_s 的标准电阻器校准时，设校准不确定度可忽略，检定证书给出的 R_s 不确定度为 $u(R_s)=0.10\Omega$。现将此 10 个电阻器用电阻可忽略的导线串联，构成标称值为 10kΩ 的参考电阻 $R_{ref}=f(R_i)=\sum_{i=1}^{10}R_i$ 。由于对电阻器来说 $r(x_i, x_j)=r(R_i, R_j)=1$，$\partial f/\partial x_i=\partial R_{ref}/\partial R_i=1$，$u(x_i)=u(R_i)=u(R_s)$，则

$$u_c^2(y)=\Big[\sum_{i=1}^{N}c_i u(x_i)\Big]^2=\Big[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\Big]^2$$

故

$$u_c(R_{ref})=\sum_{i=1}^{N}u_i(R_s)=10\times 0.10\Omega=1.0\Omega$$

注意：此例如果将合成标准不确定度 $u_c(R_{ref})$ 写成

$$u_c(R_{ref})=[u^2(R_s)]^{\frac{1}{2}}=0.32\Omega$$

是错误的。因为没有考虑 10 个电阻的校准值是相关的。本例中，设每个电阻的校准值用 $R_i=a_iR_s$ 表示，由重复观测得到的比值 a_i 的标准不确定度为 $u(a_i)$ 。进一步设 $a_i\approx1$，并设 $u(a_i)$ 对每个校准值实际上相同，所以 $u(a_i)=u(a)$。由不确定度传播律，$u^2(R_i)=a_i^2u^2(R_s)+R_s^2u^2(a)=u^2(R_s)+R_s^2u^2(a)$ 并且 $u(R_i, R_j)=u^2(R_s)$。由于 $R_i\approx R_j\approx R_s$，于是任意两个电阻的相关系数 $r(R_i, R_j)$ 为

$$r(R_i, R_j)=r_{ij}=\left\{1+\left[\frac{u(a)}{u(R_s)/R_s}\right]^2\right\}^{-1}$$

由于 $u(R_s)/R_s=10^{-4}$，如果 $u(a)=100\times10^{-6}$，则 $r_{ij}=0.5$；如果 $u(a)=10\times10^{-6}$，则 $r_{ij}=0.990$；如果 $u(a)=1\times10^{-6}$，$r_{ij}=1.000$。因此当 $u(a)$ 趋于 0 时，r 趋于 1，且 $u(R_i)$ 趋于 $u(R_s)$。

一般而言，在与校准值比较时，如此例，已核项的估计值相关，其相关的程度取决于比对标准的不确定度与参考标准的不确定度之比。实际中，与参考标准的不确定度相比，比对标准的不确定度可忽略不计时，相关系数等于 1，且每个核准项的不确定度与标准器的不确定度相同。

【例 5-7】 测量环路正弦交变电位差幅值 V，电流幅值 I，测量次数 $n=5$，这 5 次测量结果如表 5-6。

表 5-6

i	电位差幅值 V/V	电流幅值 I/mA
1	5.007	19.663
2	4.994	19.639
3	5.005	19.640
4	4.990	19.685
5	4.999	19.675
	$\overline{V}=4.999$	$\overline{I}=19.660$
	$s(\overline{V})=0.0032$	$s(\overline{I})=0.0092$

相关系数 $r(\overline{V},\overline{I})=\dfrac{\sum(V_i-\overline{V})(I_i-\overline{I})}{\sqrt{\sum(V_i-\overline{V})^2\sum(I_i-\overline{I})^2}}=-0.31$，对阻抗 $R=\overline{V}/\overline{I}$，求最佳值及其合成标准不确定度。

解：由不确定度传播律式(5-31)得

$$u_c^2(R)=\left[\frac{\partial R}{\partial \overline{V}}\right]^2u^2(\overline{V})+\left[\frac{\partial R}{\partial \overline{I}}\right]^2u^2(\overline{I})+2\left[\frac{\partial R}{\partial \overline{V}}\right]\left[\frac{\partial R}{\partial \overline{I}}\right]u(\overline{V})u(\overline{I})r(\overline{V},\overline{I})$$

$$=\left[\frac{1}{\overline{I}}\right]^2u^2(\overline{V})+\left[-\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right]^2u^2(\overline{I})-0.62\left[-\frac{\overline{V}}{\overline{I}^3}\right]u(\overline{V})u(\overline{I})$$

$$\left[\frac{u_c(R)}{R}\right]^2=\left[\frac{u_c(\overline{V})}{\overline{V}}\right]^2+\left[\frac{u_c(\overline{I})}{\overline{I}}\right]^2+0.62\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right]=0.9\times10^{-3}$$

所以，阻抗 R 的相对合成标准不确定度为 0.9×10^{-3}。

上面例子说明当数学模型 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 是以乘或除的形式表示时，可采用不确定度的相对形式。

三、合成标准不确定度的自由度

合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的自由度称为有效自由度 ν_{eff}。如果 $u_c^2(y)$ 是两个或多个估计方差分量的合成，即 $u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)$，则即使每个 x_i 是正态分布的输入量 X_i 的估计值时，变量 $(y-Y)/u_c(y)$ 的分布是 t 分布，其有效自由度 ν_{eff} 可由韦尔奇-萨特思韦特(Welch－Satterthwaite)公式计算

$$\nu_{eff}=\frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{5-35}$$

显然有

$$\nu_{\mathrm{eff}} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \nu_i$$

式(5-35)也可用于相对标准不确定度的合成，按式(5-29)计算时有

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{[p_i u(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}} = \frac{[u_{c\mathrm{rel}}(y)]^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{[p_i u_{\mathrm{rel}}(x_i)]^4}{\nu_i}} \tag{5-36}$$

实际上，如果 $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_NX_N = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i$，即使 X_i 的分布不是正态的，只要 $u_c(y)$ 比由非正态分布的 X_i 的单个分量 $c_iu_c(X_i)$ 大得多，Y 的分布通常可以用正态分布近似。

例如矩形分布是非正态分布的极端例子，但即使只有三个等宽度的矩形分布，其卷积接近正态。如果每个矩形分布的半宽是 a，则每个的方差为 $a^2/3$，卷积分布的方差为 $\sigma^2=a^2$。卷积分布的95%和99%置信水平的区间分别为 1.937σ 和 2.379σ。而对标准偏差为 σ 的正态分布相应的区间为 1.960σ 和 2.576σ。

因此对于合成不确定度 $u_c(y)$，一般情况下都按 t 分布处理。

【例 5-8】 已知某量含不相关的不确定度分量，其值与自由度分别如下：

$$u_1 = 10.0 \qquad \nu_1 = 5$$
$$u_2 = 10.0 \qquad \nu_2 = 5$$
$$u_3 = 10.0 \qquad \nu_3 = 5$$
$$u_4 = 10.0 \qquad \nu_4 = 5$$

求合成标准不确定度 u_c 及有效自由度 ν_{eff}。

解：由于各不确定度分量不相关，故

$$u_c^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$
$$u_c = 20.0$$

由公式(5-35)得

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_c^4}{\frac{u_1^4}{\nu_1} + \frac{u_2^4}{\nu_2} + \frac{u_3^4}{\nu_3} + \frac{u_4^4}{\nu_4}} = 20$$

四、合成标准不确定度的计算流程

综上所述，可用图5-3简明地表示出合成标准不确定度的计算流程。

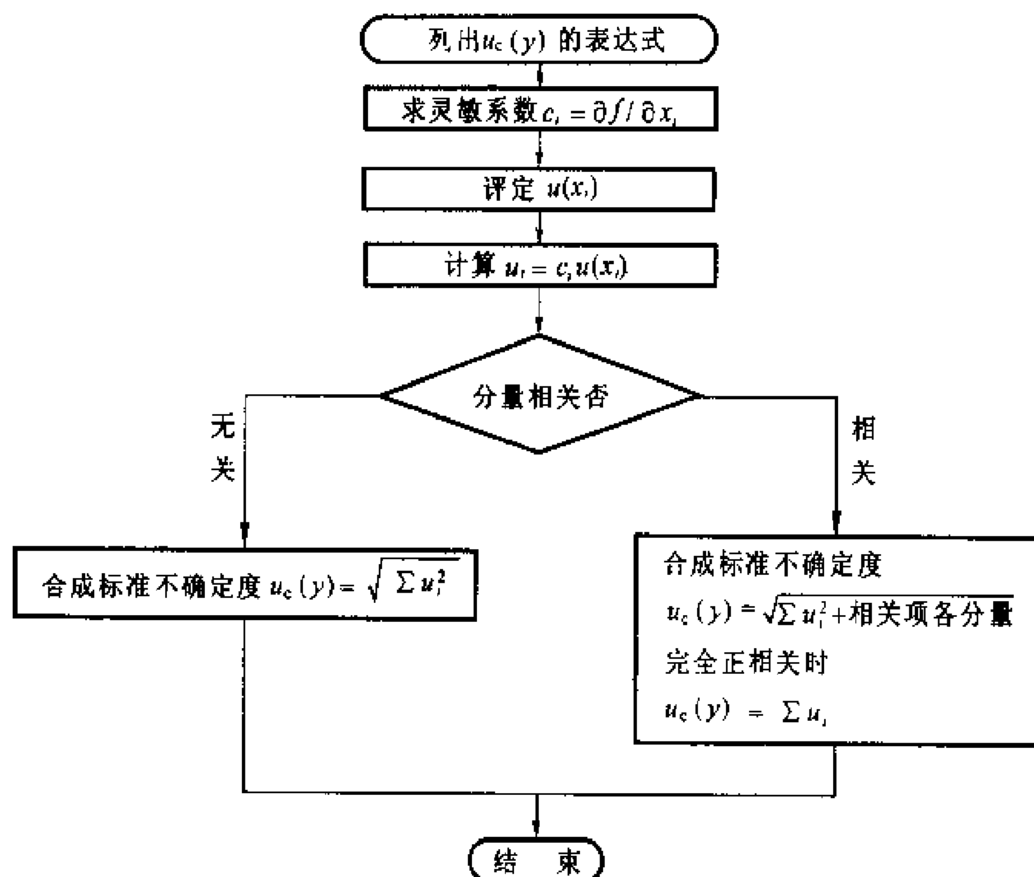


图 5-3　合成不确定度计算流程图

第五节　扩展不确定度的评定

一、输出量的分布特征

上一节介绍了合成标准不确定度，评定的基本过程是由各个不确定度分量$u_i(y)=c_iu(x_i)$，通过数学计算求出合成标准不确定度$u_c(y)$。值得指出的是：

①各输入量X_i可能遵从不同的分布(如正态、均匀、三角分布等)，对应于每一个输入量X_i有三个参量，即标准不确定度$u(x_i)$、自由度ν_i及它的分布特征。

②输出量(被测量)Y也具有三个参量，即合成标准不确定度u_c、有效自由度ν_{eff}及分布特征。

很明显，合成标准不确定度$u_c(y)$及有效自由度ν_{eff}可以由相应的数学公式直接计算出。现在的问题是：输出量Y遵从什么分布？对于这个问题，统计学中有系统的论述。这里我们只作些不够严谨的简单说明：

如果 $Y=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_NX_N=\sum_{i=1}^{N}c_iX_i$ 以及所有的 X_i 是用正态分布表征的，则 Y 的卷积分布的结果也是正态分布的。然而，即使 X_i 的分布不是正态的，根据“中心极限定理”，Y 的分布通常可以用正态分布近似。

需要强调的是，对应于上面的第二句话，N 应较大(即 X_i 的个数较多)，而且各 X_i 对 Y 的贡献应相对比较均衡。但当 N 较小，而且各 X_i 的贡献很不平衡时，将导致 Y 较多地具有占主导地位的输入量 X_i 的分布特征。例如：

①在有关量块测量不确定度分析实例中，合成不确定度由多个不同分布的分量构成，各分量相对比较均衡，且数量较多(6个)，故我们可以认为被测量近似遵从正态分布。

②如果输出量(被测量)$Y=X_1+X_2$，其中 X_1 遵从正态分布，而 X_2 遵从均匀分布，且 $u(x_1)$ 比 $u(x_2)$ 小很多，则可认为输出量较多地具有均匀分布的特征。

二、扩展不确定度的含义

扩展不确定度分为两种，即 U 与 U_p。前者为标准差的倍数，后者为具有概率 p 的置信区间的半宽。它们的含义不同，必要时应采用符号下标加以区别。

扩展不确定度 U 由合成标准不确定度 u_c 乘以包含因子 k 得到

$$U=ku_c$$

测量结果可表示为 $Y=y\pm U$，y 是被测量 Y 的最佳估计值，被测量 Y 的可能值以较高的置信水准落于区间$[y-U,\ y+U]$，即 $y-U\leqslant Y\leqslant y+U$。

对于任一给定的置信概率 p，扩展不确定度记为 U_p，表示为

$$U_p=k_pu_c(y)$$

三、包含因子的选择

①如果 $u_c(y)$的自由度较小，并要求区间具有规定的置信水准 p，当按中心极限定理估计接近正态分布时，k_p 采用 t 分布临界值。

将 $u_c(y)$乘以给定概率 p 的包含因子 k_p，从而得到扩展不确定度 U_p。可以期望在 $y-U_p$至$y+U_p$ 的区间内，以概率 p 包含了测量结果的可能值。$k_p=t_p(\nu_{eff})$，一般采用的 p 值为99%和95%。多数情况下，果用 $p=95\%$。对某些测量标准的检定或校准，根据有关规定可采用 $p=99\%$。当 ν_{eff}充分大而被测量可能值又接近正态分布时，可以近似认为 $k_{95}=2$，$k_{99}=3$，从而分别得出 $U_{95}=2u_c(y)$，$U_{99}=3u_c(y)$。

注意 U_p 的写法，应写成 U_{99}，U_{95} 而不写成 $U_{0.99}$ 与 $U_{0.95}$。

【例 5-9】 由于数学模型 $y=f(x_1, x_2, x_3)=bx_1x_2x_3$。是乘积关系，则可采用相对形式。估计值 x_1，x_2，x_3 分别为 $n_1=10$，$n_2=5$，$n_3=15$ 次独立观测的算术平均值，其相对标准不确定度为

$$u_{1rel}=u(x_1)/x_1=0.25\%$$

$$u_{2rel}=u(x_2)/x_2=0.57\%$$

$$u_{3rel}=u(x_3)/x_3=0.82\%$$

求测量结果 y 的具有 95%置信水准的扩展不确定度。

解：

$$\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{u_i(x_i)}{x_i}\right]^2$$

$$u_{crel}=1.03\%$$

由式(5-36)得

$$\nu_{eff}=\frac{(1.03)^4}{\dfrac{(0.25\%)^4}{10-1}+\dfrac{(0.57\%)^4}{5-1}+\dfrac{(0.82\%)^4}{15-1}}=19.0$$

根据 $p=95\%$，$\nu_{eff}=19$，查 t 分布表，得 $t_{95}(19)=2.09$，故

$$U_{rel}=2.09\times1.03\%=2.2\%$$

②如果可以确定 Y 可能值的分布不是正态分布，而是接近于其他某种分布，则绝不应按 $k=2\sim3$ 或 $k_p=t_p(\nu_{eff})$ 计算 U 或 U_p。例如，当 Y 可能值近似为矩形分布时，则包含因子 k_p 与 U_p 之间的关系如下：

对于 U_{95}，$k_p=1.65$

对于 U_{99}，$k_p=1.71$

例如用高精度的电压源校准低分辨力的数字电压表。重复测量时，由于被检电压表分辨力很低，将会导致测量数据列重复性很好(甚至可能出现重复性变化为零的极端情况)。此时，由测量列进行 A 类评定时该不确定度分量将非常小。而被检数字电压表分辨力 δx 带来的 B 类不确定度分量 $u(x)=0.29\delta x$(属于均匀分布)将占主导地位。此时 Y 可能值的分布即近似为均匀分布。

③当 y 和 $u_c(y)$ 所表征的概率分布近似为正态分布，且 $u_c(y)$ 的有效自由度较大时，在合成标准不确定度 $u_c(y)$ 确定后，乘以一个包含因子 k，即 $U=ku_c(y)$，可以期望在 $y-U$ 至 $y+U$ 的区间包含了测量结果可能值的较大部分。k 值一般取 2～3，在大多数情况下取 $k=2$，当取其他值时，应说明其来源。

当只给出扩展不确定度U时，不必评定各分量及合成标准不确定度的自由度ν_i及ν_{eff}。值得注意的是，当直接选取包含因子k时，一般不给出置信水准p。在日常校准工作中，若用户不提出p的要求，则可采用此方式给出扩展不确定度。若要求给出p，就应给出ν_{eff}。

在实际工作中，若对Y可能值的分布作正态分布的估计，虽未计算ν_{eff}，但可估计其值并不太小时，则$U=2u_c(y)$大约是置信概率近似为95%的置信区间的半宽，而$U=3u_c(y)$大约是置信概率近似为99%的置信区间的半宽。

四、扩展不确定度评定的流程

总结以上所述，可用图5-4简明地表示出扩展不确定度评定的流程。

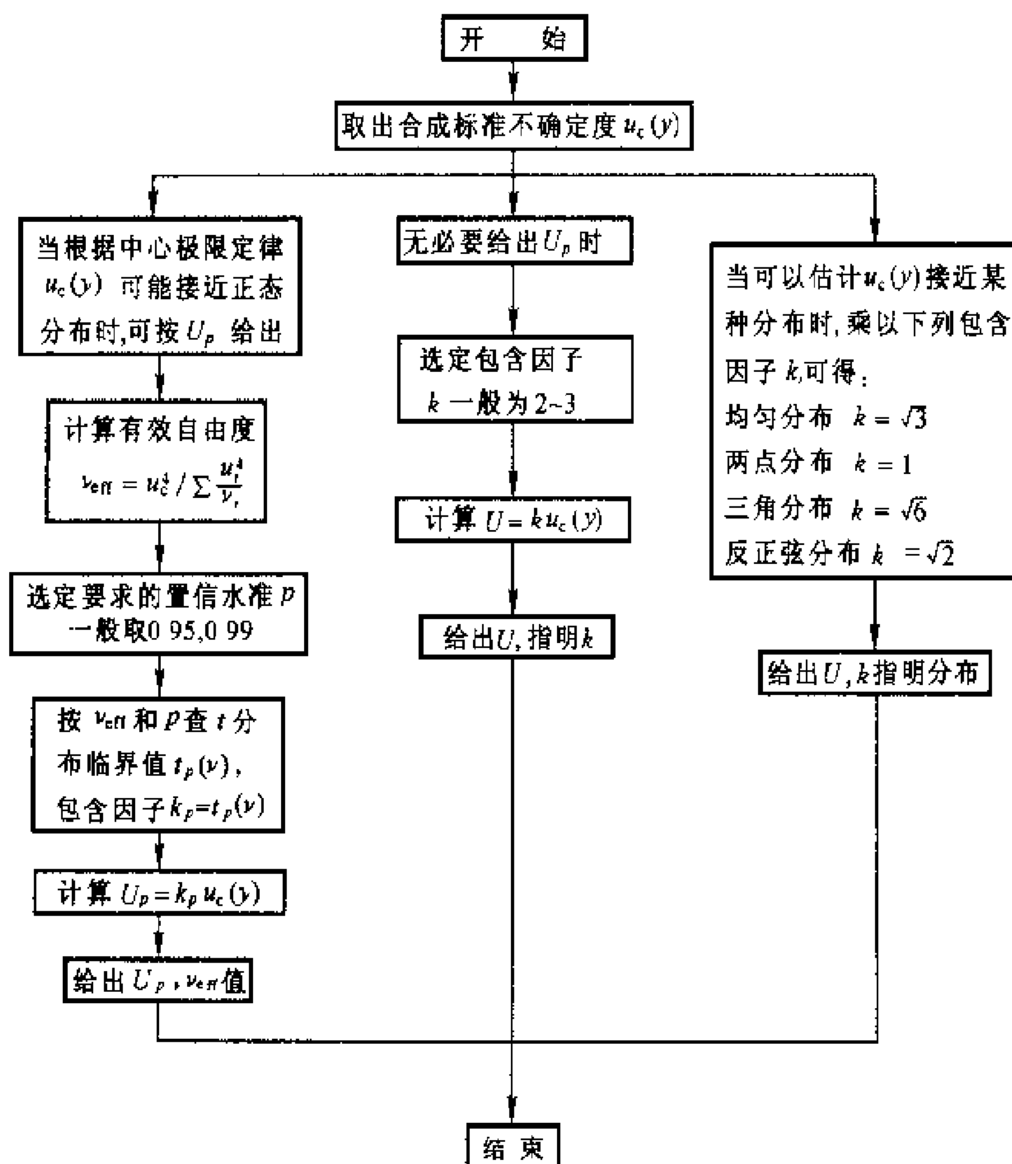


图5-4　扩展不确定度评定流程图

第六节 测量不确定度的报告与表示

一、测量结果及其不确定度的报告

完整的测量结果含有两个基本量，一是被测量 Y 的最佳估计值 y，一般由数据测量列的算术平均值给出；另一个就是描述该测量结果分散性的量，即测量不确定度。它实际上是测量过程中来自于测量设备、环境、人员、测量方法及被测对象所有的不确定度因素的集合。一般以合成标准不确定度 $u_c(y)$、扩展不确定度 $U(y)$或它们的相对形式 $u_{crel}(y)$、$U_{rel}(y)$给出。

(1) 被测量的最佳估计值一般是有量纲的量，例如：20.5℃，1.234mm 等。而对量纲 1 的量，其测量结果表达为一个数。

(2) 测量不确定度以 $u_c(y)$，$U(y)$形式给出时，具有同被测量最佳估计值相同的量纲。如 $U_{95}=1.8$℃，$u_c(l)=32$mm 等。测量不确定度若以 $u_{crel}(y)$、$U_{rel}(y)$形式给出时，则均为无量纲量。如 $U_{95rel}=7.9\times10^{-6}$等。当以相对形式给出测量不确定度时，置信区间半宽由相对测量不确定度与最佳估计值相乘得到。

如何将最佳估计值与测量不确定度表示出来？在国家计量技术规范 JJF 1059—1999《测量不确定度评定与表示》中对表示的格式作了明确规定。显然，以 JJF 1059—1999 中规定之外的形式表示测量结果，是不合适也是不允许的。因为

(1) 以规定的形式报告具有国际通用性，便于各技术机构相互交流、比对。

(2) 以规定的形式报告提供足够多的信息量，便于使用者分析引用。如各级计量部门进行具体的不确定度分析时，需引入上级标准的不确定度分量，它体现了不确定度的“传播性”。

不确定度的信息量包含从被测量的定义、函数关系、相关性、处理方法直至得到 U_p，p，ν_{eff}以及报告结果的所有信息。当然并不要求所有的测量都必须提供全部的信息量，按具体情况只要提供足够多的信息即可。如

①对于比较重要的测量，不确定度报告按以下内容：

a) 有关输入量与输出量的函数关系以及灵敏系数 c_i；

b) 修正值和常数的来源及其不确定度；

c) 输入量 X_i 的实验观测数据及其估计值 x_i，标准不确定度 $u(x_i)$的评定方法及其量值、自由度 ν_i，并将它们列成表格；

d) 对所有相关输入量给出其协方差或相关系数 r 及其获得方法；

e）测量结果的数据处理程序，该程序应易于重复，必要时报告结果的计算应能独立重复。

比较重要的测量如：大宗商贸索赔案中的测量、计量器具新产品生产定型鉴定中的测量等。

②工业生产、商业等日常的大量测量中一般不要求提供测量不确定度。如去商场买 1m 布、1kg 水果等。不过前提条件是所使用的测量仪器是经过检定并处于合格状态。如上例中使用的尺子、秤等应满足相应的技术要求。

③证书上的校准结果或修正值应给出测量不确定度。这一条对计量部门尤为重要。当然报告中给出的信息量的多少随测量的性质不同而有所变化。如国家基准的测量不确定度报告应包含较多的信息，而检测普通等级的压力表，只需给出被测量的最佳估计值及测量不确定度即可，至于被测量的定义、方法、函数关系等等一般可以不在报告中反映出来。

④有时信息量的多少由用户的具体要求给出。

二、测量不确定度的报告方式

报告测量不确定度有两种方式。一类是直接用（未扩展的）合成标准不确定度，另一类是使用扩展不确定度。

1. 使用合成标准不确定度

（1）适用范围

a）基础计量学研究；

b）基本物理常量测量；

c）复现国际单位制的国际比对。

例如铯频率基准的不确定度用合成标准不确定度表示，属于基础计量学研究。又如 1986 年 CIPM 要求所有成员国进行 CIPM 及其咨询委员会主持下的国际比对或其他工作中，给出结果时应使用合成标准不确定度。

（2）应包括的内容

当用合成标准不确定度报告测量结果的不确定度时，除上述内容要求外，还须注意

a）明确说明被测量 Y 的定义；

b）给出被测量 Y 的估计值 y、合成标准不确定度 $u_c(y)$ 及其单位，必要时还应给出自由度 ν_{eff}。

c）必要时也可给出相对标准不确定度 $u_{crel}(y)$。

（3）报告的四种基本形式

合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的报告可用以下 4 种形式之一。例如，标准砝

码的质量为 m_s，测量结果为 100.021 47g，合成标准不确定度 $u_c(m_s)$ 为 0.35mg，则

a) m_s＝100.021 47g；合成标准不确定度 $u_c(m_s)$＝0.35mg。

b) m_s＝100.021 47(35)g；括号内的数是按标准差给出的，其末位与前面结果内末位数对齐。

c) m_s＝100.021 47(0.000 35)g；括号内按标准差给出，与前面结果有相同计量单位。

d) m_s＝(100.021 47±0.000 35)g；正负号后之值按标准差给出，它并非置信区间。

形式 b)一般用于公布常数、常量。

形式 d)虽为系列国家标准《量和单位》一贯采用，但因习惯上用于表示高置信概率的区间，一般应避免使用。

注意：

①以上 4 种形式后半部的文字往往是必须的，如 d)中指出 0.000 35 并非置信区间。

②注意数字的书写形式，如 m_s＝100.021 47g 在 021 与 47 中间有空格（千分空），按规定是自小数点往左和往右每三位留一空格（千分空）。如：m_s＝100.021 477 6g。

2. 使用扩展不确定度

(1) 适用范围

除上述指明的 3 种情况及某些特殊要求情况以外，一般皆使用扩展不确定度 $U(U_{rel})$ 或 $U_p(U_{prel})$。

(2) 应包括的内容

当用 U 或 U_p 报告测量扩展不确定度时，除国家计量技术规范所涉及的内容外，还应注意：

a)明确说明被测量 Y 的定义；

b)给出被测量 Y 的估计值 y，扩展不确定度 U 或 U_p 及其单位；

c)必要时也可给出相对扩展不确定度 U_{rel}；

d)对 U 应给出 k 值；对 U_p 应明确 p 值，最好再给出 ν_{eff}，以便于不确定度传播到下一级。

(3) 报告的基本形式

①$U=ku_c(y)$的报告可用以下两种形式之一，例如，$u_c(y)$＝0.35mg，取包含因子 k＝2，U＝2 ×0.35mg＝0.70mg，则

a)m_s＝100.021 47g，U＝0.70mg；k＝2。

b) $m_s=(100.02147\pm0.00070)$g；$k=2$。

②$U_p=k_pu_c(y)$的报告可用以下4种形式之一，例如，$u_c(y)=0.35$mg，$\nu_{eff}=9$，按 $p=95\%$，查附表2得 $k_p=t_{95}(9)=2.26$，$U_{95}=2.26\times0.35$mg$=0.79$mg，则

a) $m_s=100.02147$g，$U_{95}=0.79$mg；$\nu_{eff}=9$。

b) $m_s=(100.02147\pm0.00079)$g；$\nu_{eff}=9$。括号内第二项为 U_{95}之值。

c) $m_s=100.02147(79)$g；$\nu_{eff}=9$，括号内为 U_{95}之值，其末位与前面结果内末位数对齐。

d) $m_s=100.02147(0.00079)$g；$\nu_{eff}=9$，括号内为 U_{95}之值，与前面结果有相同计量单位。

③不确定度也可以相对形式 U_{rel}或 u_{rel}报告，例如：

a) $m_s=100.02147(1\pm7.9\times10^{-6})$g；$p=95\%$，式中 7.9×10^{-6}为 U_{95rel}之值。

b) $m_s=100.02147$g，$U_{95rel}=7.9\times10^{-6}$。

④上述列举的表达形式中的符号含义，必要时应有文字说明，也可采用它们的名称代替符号，或同时采用。如有必要，单位的符号亦可代之以中文符号或名称。

⑤当给出扩展不确定度 U_p时，为了明确起见，推荐以下说明方式，例如

$$m_s=(100.02147\pm0.00079)\text{g}$$

式中，正负号后的值为扩展不确定度 $U_{95}=k_{95}u_c$，而合成标准不确定度 $u_c(m_s)=0.35$mg，自由度 $\nu=9$，包含因子 $k_p=t_{95}(9)=2.26$，从而具有约为95%概率的置信区间。

注意：

①估计值 y 的数值与不确定度的数值的位数(下面介绍)；

②报告中置信概率的表述。如 U_{95}，U_{99}等(相应的置信概率为95%与99%)，一般不使用95.45%与99.73%的表述，也不使用0.95与0.99的表述。

国内外计量界过去常常用 $p=99.73\%$，所谓 3σ 的置信概率，实际上只有在理论上是正态分布形式，而且重复的次数 $n\to\infty$时，$p=99.73\%$才有可能。所以，今后在实用中，即使 $k=3$，也只能给出 $p=99\%$，在工业技术领域，通常只采用 $p=95\%$，这是ISO的一些标准中所推荐的。当技术规范中对置信概率或置信水准有明确规定时，则按规定执行。

三、测量结果及其不确定度的有效位

估计值 y 的数值和它的标准不确定度 $u_c(y)$或扩展不确定度 U 的数值

都不应该给出过多的位数。通常 $u_c(y)$ 和 U[以及输入估计值 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$]最多为两位有效数字。虽然在某些情况下，为了在连续计算中避免修约误差而必须保留多余的位数。

在报告最终结果时，有时可能要将不确定度最末位后面的数都进位而不是舍去。例如，$u_c(y)=10.47\text{m}\Omega$，可以进位到 11mΩ。但一般的修约规则(参见 GB 3101—1993《有关量、单位和符号的一般原则》)也应该可用，如 $u(x_i)=28.05\text{kHz}$，经修约后写成 28kHz。输入和输出的估计值，应修约到与它们不确定度的位数一致。例如，如果 $y=10.057\ 62\Omega$，其 $u_c(y)=27\text{m}\Omega$，则 y 应进位到 10.058Ω。如果相关系数的绝对值接近 1，则相关系数应给出三位有效数字。

①通常 $u_c(y)$ 和 U 最多为两位有效数字，可以理解为取 1 位或 2 位皆可以，一般不给出 2 位以上。这是指最后结果的形式，计算过程可适当保留多位。

例如：国际上 1992 年公布相对原子质量 A_r 时，给出的不确定度均只有一位。如：

$$A_r(\text{C})=12.011(1)$$

$$A_r(\text{O})=15.999\ 4(3)$$

1996 年国际上公布的物理常量，给出的不确定度均为两位。如：

$$L=6.022\ 136\ 7(36)\times10^{23}\text{mol}^{-1}$$

$$m_e=u=1.660\ 540\ 2(10)\times10^{27}\text{kg}$$

这里需要指出的是，保留一位有效数字时往往会导致很大的修约误差。尤其是第一位有效数字较小时。

例如：表示为 0.001 的不确定度，其修约误差之模有可能大到 0.000 5(如 0.001 49 修约到 0.001)，占给出的不确定度的 1/2，实在太大，显得极不合理。随着修约前第一位数字的增大(如 0.000 349 修约到 0.000 3，修约误差占给出不确度的 1/6)，修约误差的影响将减小。因此，对给出的测量不确定度，当其第一位有效数字是 1 和 2 时，有的国家规定应是两位有效数字，而 3 以上则可只用一位有效数字，而不能一律只为一位有效数字。这一做法在 GUM 与 JJF1059—1999 中虽未作出规定，但应引起注意。

②一旦测量不确定度的有效位数确定了，则应采用它的修约间隔来修约测量结果以确定其有效至哪一位。也就是说，当采用同一测量单位来表述测量结果和其不确定度时，它们的末位应是对齐的。

例如：被测质量的测量结果为

$$m=100.021\ 445\ 50\text{g}$$

其扩展不确定度 $U_{95}=0.355\text{mg}$，保留 2 位应修约成 0.36mg，其修约间隔为

0.01mg。用这个修约间隔来修约测量结果，得

$$m=100.021\ 45\text{g}\ ;\ U_{95}=0.36\text{mg}$$

若 U_{95} 只用一位有效数字，则应修约为 0.4mg，其修约间隔为 0.1mg，则测量结果为

$$m=100.021\ 4\text{g}\ ;\ U_{95}=0.4\text{mg}$$

以上两种情况如改用相同测量单位，则为

$$m=100.021\ 45\text{g}\ ;\ U_{95}=0.000\ 36\text{g}$$

$$m=100.021\ 4\text{g}\ ;\ U_{95}=0.000\ 4\text{g}$$

它们的末位是对齐的。

注意：

①不许连续修约。即在确定修约间隔后一次修约获得结果而不得多次修约。

例如：15.454 6mm 修约间隔为 1mm。

正确：15.454 6mm→15mm

错误：15.454 6mm→15.455mm→15.46mm→15.5mm→16mm

②当不确定度以相对形式给出时，不确定度也应最多保留两位有效数字。此时，测量结果的修约应将不确定度以相对形式返回到绝对形式，同样至多保留 2 位，再相应修约测量结果。

例如：被测质量的测量结果为

$$m=100.021\ 474\ 6\text{g}$$

其相对不确定度为 $U_{95\text{rel}}=7.94\times10^{-6}$，保留两位，应修约成 7.9×10^{-6}。则

$$U_{95}=7.9\times10^{-6}\times100.021\ 474\ 6\text{g}\approx7.902\times10^{-4}\text{g}$$

修约成 2 位为 7.9×10^{-4}g 则得

$$m=100.021\ 47\text{g};\ U_{95\text{rel}}=7.9\times10^{-6}$$

③当采用同一测量单位来表示测量结果和其不确定度时，它们的末位必须是对齐的。

若出现测量结果实际位数不够而无法与测量不确定度对齐时，一般的操作方法是补零后对齐。

例如：若测量结果 $m=100.021\ 4$g，而 $U_{95}=0.36$mg 则表示成

$$m=100.021\ 40\text{g}\ ;\ U_{95}=0.36\text{mg}$$

四、测量不确定度评定的总流程

总结以上所述，可用图 5-5 简明地表示出测量不确定度评定的全部流程。

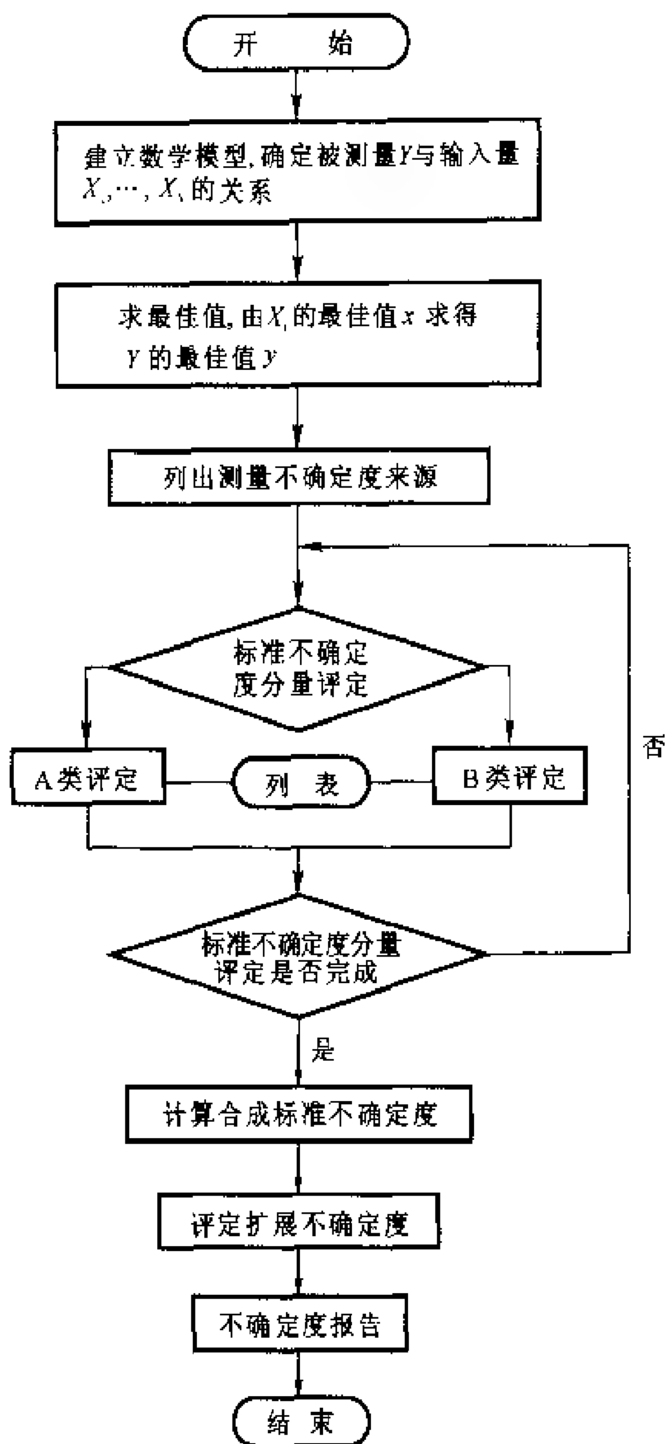


图 5-5 测量不确定度评定的总流程图

习题五

5-1 归纳总结测量误差与测量不确定度异同点及相互之间的关系。

5-2 不确定度是如何分类的？该分类方法的特点是什么？

5-3 何谓自由度？不同情况下的自由度如何确定？

5-4 覆盖因子是如何定义的？确定方法如何？

5-5　用电子微量天平在重复性条件下测量某一标准超声源的总输出功率10次，测得值为：6.270W，6.271W，6.278W，6.274W，6.272W，6.273W，6.277W，6.295W，6.277W，6.276W。求测量的最佳估计值和测量不确定度、量信概率 $p=99\%$。

5-6　某实验拟用四块一级最块组成基本尺寸为43.655mm的量块组，已知各量块中心长度及其误差分别为：

$$L_1=40\text{mm} \qquad e_1=0.35\mu\text{m}$$
$$L_2=1.6\text{mm} \qquad e_2=0.20\mu\text{m}$$
$$L_3=1.05\text{mm} \qquad e_3=0.20\mu\text{m}$$
$$L_4=1.005\text{mm} \qquad e_4=0.20\mu\text{m}$$

假定给出的误差限服从正态分布，取置信概率 $p=95\%$，求该量块组引起的测量不确定度。

5-7　某校准证书说明，标称值10Ω的标准电阻器的电阻 R 在20℃时为(10.000 74±0.000 13)Ω($p=99\%$)，求该电阻器的标准不确定度，并说明属于那一类评定的不确定度?

5-8　某数字电压表的说明书指出，该表在校准后的两年内，其2V量程的测量误差不超过±($14\times10^{-6}\times$读数$+1\times10^{-6}\times$量程)V，相对标准差为20%，若按均匀分布，求1V测量时电压表的标准不确定度；设在该表校准一年后，对标称值为1V的电压进行16次重复测量，观测值的平均值为0.928 57V，并由此算得单次测量的标准差为0.000 036V，若以平均值作为测量的估计值，试分析影响测量结果不确定度的主要来源，分别求出不确定度分量，说明评定方法的类型，求测量结果的合成标准不确定度及其自由度。

第6章 直接测量不确定度评定

直接测量就是用测量仪器直接获得被测量的量值的方法，是测量中最常用的方法。直接测量法分为下列两种。

(1) 等精度(或等权)直接测量；

(2) 不等精度(或不等权)直接测量。

本章将讨论这两种方法的不确定度评定，这些评定属于A类评定。

第一节　等精度直接测量不确定度评定

一、概述

等精度测量是指参与测量的五个要素均不发生变化的条件下的多次重复测量。又可称为重复性测量。等精度测量是一个理想的概念。

设 A 为任意量，现对其进行重复性测量，共测量 n 次，其测量值为

$$x_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

由于每次测量的测量仪器、测量环境、测量方法和测量人员都保持一致或不变，所以每次测量的准确度都是相同的，也即 x_i 的标准差 s_i 都认为是相等的：

$$s_1=s_2=\cdots=s_n=s$$

在实际测量中，是否为重复性测量或等精度测量主要凭经验和遵守重复性测量所规定的条件来判断。

二、等精度直接测量不确定度评定方法与步骤

尽管测量者努力使测量满足等精度测量的要求，但在实际测量过程中，绝对做到等精度测量是不可能的，得到的测量列中在存在系统效应和随机

效应导致的不确定度的同时，有可能还存在已定系统误差，甚至存在粗大误差。在测量不确定度评定之前，应首先剔除粗大误差，消除已定系统误差。因此，等精度直接测量数据的处理可分为预处理和测量不确定度评定两大步骤。

（一）测量数据的预处理

1. 系统误差的消除

（1）找出产生系统误差的因素，从产生系统误差的根源上消除系统误差对测量的影响，使得测量列中不含系统误差。

（2）针对产生系统误差的不同因素，设计测量方法，消除系统误差对测量结果的影响。

（3）找出定值系统误差的大小，利用加修正值的方法，使测量结果不含定值系统误差。

2. 判断粗大误差并将其剔除

利用第四章中叙述的粗大误差判别准则，判别测量列中是否存在含有粗大误差的异常值，若发现异常值，应将其剔除，直到测量列中不包含异常值为止。

（二）测量不确定度的评定

对于仅含有系统效应和随机效应所致不确定度的测量列，其测量不确定度属 A 类不确定度，其评定方法和步骤如下：

（1）计算测量列算术平均值 $\bar{x}$，即

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6-1}$$

$\bar{x}$ 为测量结果的最佳估计值

（2）计算残余误差 v_i，即

$$v_i = x_i - \bar{x} \tag{6-2}$$

（3）计算 $\bar{x}$ 的标准不确定度 $u(\bar{x})$，即

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \tag{6-3}$$

（4）确定包含因子 k_p

包含因子 k 与测量列的分布特征、自由度和置信水准 p 有关。置信水准 p 值一般采用 99%和 95%，多数情况下采用 95%；自由度 $\nu=n-1$；测量列的分布在没有其他非正态的明显特征（如正态分布、三角分布等），原

则上采用 t 分布。其 k_p 值采用 t_α 分布临界值(查附录 2 可得)。而当自由度 ν 充分大而被测量可能值又接近正态分布时，可以近似认为 $k_{95}=2$，$k_{99}=3$。当测量列非正态分布特征明显时，按具体的分布查得 k 值。

(5) 计算扩展不确定度 U，即

$$U = k_p u(\bar{x}) \tag{6-4}$$

(6) 测量结果的表达

$$X = \bar{x} \pm U = \bar{x} \pm k_p u(\bar{x}) \tag{6-5}$$

三、等精度直接测量数据处理实例

【例 6-1】 对某物体的质量等精度直接称量 9 次，得到数据见表 6-1，求测量结果($p=99\%$)。

表 6-1

序号	测量值 x_i/g	残余误差 v_i/g	v_i^2
1	24.774	−0.001	0.000 001
2	24.778	+0.003	0.000 009
3	24.771	−0.004	0.000 016
4	24.780	+0.005	0.000 025
5	24.772	−0.003	0.000 009
6	24.777	+0.002	0.000 004
7	24.773	−0.002	0.000 004
8	24.775	0	0
9	24.774	−0.001	0.000 001
	$\sum_{i=1}^{9} x_i = 222.974$ $\bar{x} = 24.775$	$\sum_{i=1}^{9} v_i = -0.001$	$\sum_{i=1}^{9} v_i^2 = 0.000\,069$

解：设测量前已进行分析，并设法消除了明显的系统误差，且不存在粗大误差。因此，可进行下列步骤的运算：

(1) 计算该物体质量的最佳估计值 $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{9} \times 222.974 = 24.775\text{g}$$

(2) 计算残余误差 v_i(已列于表内)

(3) 计算 $\bar{x}$ 的标准不确定度 $u(\bar{x})$

$$u(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{\frac{0.000\,069}{9(9-1)}} = 0.001\text{g}$$

(4) 确定包含因子 k_p

因测量次数较少，采用 t 分布计算。此时 $\nu=n-1=8$，取 $\alpha=1-p=0.01$，查附录 1 得 $k_{99}=3.36$。

(5) 计算 $\bar{x}$ 的扩展不确定度 U

$$U=k_p u(\bar{x})=3.36\times 0.001\approx 0.003\text{g}$$

(6) 测量结果报告　　$(24.775\pm 0.003)\text{g}$，$\nu=8$，$p=99\%$

第二节　不等精度直接测量不确定度的评定

一、概述

不等精度测量是指在测量过程中，参与测量的五个要素除被测对象不能改变外，其他四个要素发生改变所进行的测量。又称为复现性测量。常用于高准确度的测量问题。

设 A 为任意量，现对其进行复现性测量，测量次数为 n，测量列为

$$x_i \quad (i=1, 2, 3, \cdots, n)$$

根据复现性的条件，x_i 与 x_j 的标准差互不相等$(i\neq j)$，即

$$s_i\neq s_j \quad (i, j=1, 2, 3, \cdots, n;\ i\neq j)$$

在实际测量中，若每次测量的条件不尽相同，如仪器、测量方法、测量环境以及测量人员中任何一项发生明显变化，都有充分理由认为 n 次测量值是不等精度或不等权的测量。

产生不等精度测量主要有下面两种情况：一是对同一被测量进行了 m 组等精度测量，即有 m 组等精度测量列，每次测量的标准偏差均为 s。但每组的测量次数 $n_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 不相等。对每一测量列而言，自然以它们的算术平均值 $\bar{x}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 作为被测量的测量结果。各组平均值的标准偏差按等精度测量估计，按下式计算：

$$s_i=\frac{s}{\sqrt{n_i}} \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{6-6}$$

由于各组的测量次数 n_i 不相等，由上式知，s_i 也不等。因此，$\bar{x}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 是被测量 m 个不等精度的测量结果。第二种情况是同一被测量，由不同的仪器，或不同的环境，或不同的方法，或不同的标准器具，总之，在不同的测量条件下测量。因此，测量结果的标准偏差也不相同，形成被测量的不等精度的若干个测量结果，即被测量的 m 个测量结果 $\bar{x}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 的标准偏差 $s_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 不相等。

二、权的概念及其确定

1. 权的概念

在等精度测量中，各个测量值可认为同样可靠，并取所有测得值的算术平均值作为最后测量结果。在不等精度测量中，各个测量结果的可靠程度不一样，因而不能简单地取各测量结果的算术平均值作为最后测量结果，应让可靠程度大的测量结果在最后结果中占的比重大一些，可靠程度小的占比重小一些。各测量结果的可靠程度可用一数值来表示，这个数值即称为该测量结果的"权"，记为 w。因此测量结果的权可理解为：当它与另一些测量结果比较时，对该测量结果所给予的信赖程度。

既然测量结果的权说明了测量的可靠程度，因此可根据这一原则来确定权的大小。例如可按测量条件的优劣、测量仪器和测量方法所能达到的准确度高低、重复性测量次数的多少以及测量者水平高低来确定权的大小，亦即测量方法愈完善，测量准确度愈高，所得测量结果的权也应愈大。在相同条件下，由于不同水平的测量者用同一种测量方法和仪器对同一被测量进行测量，显然对于经验丰富的测量者所测得的结果应给予较大的权。

2. 权的确定

由上所述，权是测量结果在相互比较时各自的信赖程度，是它们取平均值时各自所占的比例，因此，我们关注的是它们信赖程度的比例。

在确定各测量结果的权时，显然，对于那些误差较小，即方差较小，可靠程度较高的测量结果应占有较大的比例；而对于那些误差较大，即方差较大、可靠程度较低的测量结果应占有较小的比例。因此，测量结果的权与表示该测量结果可靠程度的指标——方差 s^2 成反比。

设被测量的一组不等权测量结果 $x_i(i=1, 2, \cdots, m)$，其方差分别为 $s_i^2(i=1, 2, \cdots, m)$，则它们的权 w_i 与各自的方差成反比，即

$$w_i \propto \frac{1}{s_i^2} \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{6-7}$$

显然，由上式知测量结果的权 $w_i>0$。且由式(6-7)知，具有相同方差 s^2 的等精度测量列，它们的权相等。因此，等精度测量也是等权测量。它是不等精度测量的特例。

3. 有关权的几个公式

(1) 解决不等精度测量结果的平均值问题，关键是确定各测量结果之间可靠程度的比例。此比例由式(6-7)可知为

$$w_1 : w_2 : \cdots : w_n = \frac{1}{s_1^2} : \frac{1}{s_2^2} : \cdots : \frac{1}{s_n^2} \tag{6-8}$$

由比例的性质可知：对于任意的常数 $k>0$，由式(6-8)得公式：

$$w_1 : w_2 : \cdots : w_n = kw_1 : kw_2 : \cdots : kw_n = \frac{k}{s_1^2} : \frac{k}{s_2^2} : \cdots : \frac{k}{s_n^2} \tag{6-9}$$

由上式知：对于不等权测量结果的可靠程度，其相互之间的比例是确定的，但权的数值的表示不是惟一的。例如，有三个不等权的测量结果 x_1，x_2 和 x_3，假设它们的权分别为 $w_1=1$，$w_2=3$ 和 $w_3=4$。那么也可认为它们的权分别为 $w_1=2$，$w_2=6$ 和 $w_3=8$。因为在这两种情况下，权之间的比例是相等的，即

$$w_1 : w_2 : w_3 = 1 : 3 : 4 = 2 : 6 : 8 = \cdots$$

由式(6-9)可得比式(6-8)更一般的权的表达式，即

$$w_i = \frac{k}{s_i^2} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{6-10}$$

由式(6-10)可得下列公式：

$$w_1 s_1^2 = w_2 s_2^2 = \cdots = w_m s_m^2 = k \tag{6-11}$$

(2) 对被测量进行 m 组等精度测量，单次测量的标准偏差为 s，每组的测量次数分别为 n_1，n_2，…，n_m。设各组的平均值为 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，…，$\bar{x}_m$。因各组是等精度测量列，所以各组平均值的方差为

$$s_i^2 = \frac{s^2}{n_i} \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

将上式改写成下列形式：

$$n_i = \frac{s^2}{s_i^2} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{6-12}$$

上式与式(6-10)比较，取 $k=s^2$，使得

$$w_i = n_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{6-13}$$

因此，由于各级的测量次数 n_i 不等，被测量的各组等精度测量平均值 $\bar{x}_i$ 是不等权的。此时，它们的权可分别取成各组的测量次数 n_i。反之，对于被测量的任意不等精度测量列 x_1，x_2，…，x_m，设其权分别为 $w_i(i=1, 2, \cdots, m)$。那么，$\bar{x}_i$ 可认为是一组测量次数 $n_i=w_i$ 的等精度测量列的平均值。例如，x_1，x_2 和 x_3 的权分别为 $w_1=8$，$w_2=18$ 和 $w_3=25$。那么，x_1，x_2 和 x_3 可分别视作测量次数 $n_1=w_1=8$ 次，$n_2=w_2=18$ 次和 $n_3=w_3=25$ 次的等精度测量列的平均值。

4. 单位权及其方差

定义：在不等精度测量中，称权 $w_0=1$ 为单位权，它所对应的方差为单位权方差，以 s_0^2 表示。

例如，设 x_1，x_2 和 x_3 是被测量的三个不等权测量结果。它们的标准偏

差分别为 $s_1=0.04$，$s_2=0.06$ 和 $s_3=0.03$。由式(6-10)可求三个测量结果的权：

$$w_1=\frac{k}{s_1^2}=\frac{k}{0.04^2}\quad w_2=\frac{k}{s_2^2}=\frac{k}{0.06^2}\quad w_3=\frac{k}{s_3^2}=\frac{k}{0.03^2}$$

取 $k=0.0144$ 代入上式得

$$w_1=9\quad w_2=4\quad w_3=16$$

在这组不等精度测量中，取单位权 $w_0=1$，则对应的单位权方差，根据式(6-10)应为

$$w_0=\frac{k}{s_0^2}=1$$

即 $$s_0^2=k=0.0144$$

所以 $$s_0=0.12$$

如果将上述不等精度测量值 x_1，x_2 和 x_3 视作三组测量次数分别为 $n_1=w_1=9$，$n_2=w_2=4$ 和 $n_3=w_3=16$ 的平均值，那么，由式(6-12)和式(6-13)知，“单次测量方差”为

$$s^2=n_is_i^2=w_is_i^2\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

再将式(6-11)和式 $s_0^2=k=0.0144$ 代入上式得

$$s^2=s_0^2=0.0144$$

即此时单位权方差便是“单次测量方差”。这样，我们可把 x_1 看作是“单次测量标准偏差”$s=0.12$ 的某 9 次测量结果的平均值；x_2 可认为是“单次测量标准偏差”$s=0.12$ 的某 4 次测量结果的平均值等。需要注意的是 w_i 的取值不是惟一的。因此，s_0^2 的值同样不是惟一的。假设保持 w_1，w_2 和 w_3 的比值，取 $w_1=18$，$w_2=8$ 和 $w_3=32$，即 x_1，x_2 和 x_3 可认为是 18 次，8 次和 32 次的平均值。此时单位权方差应为

$$s_0^2=2k=2\times0.0144$$

而 $$s_0=\sqrt{2}\times0.12$$

由此可见，在等精度测量中，测量列的单次测量标准偏差 s 由测量条件所决定。在不等精度测量中，单位权标准偏差 s_0 的值随 w_i 取值不同而不同。因此，s 和 s_0 是两个不同的概念。

三、已知标准差时不确定度的评定

设 x_i 和其标准差 s_i 是已知的，$i=1, 2, \cdots, n$。

1. 计算 x_i 的权

根据式(6-12)、式(6-13)得

$$w_i = \frac{s^2}{s_i^2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6-14}$$

计算出各测量值的权 w_i。

2. 计算 x_i 最佳估计值

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{6-15}$$

式中：$\bar{x}$——x_i 真值的最佳估计值。

式(6-15)表明：在不等精度直接测量中，x_i 的最佳估计值为各测量值的加权算术平均值。

关于式(6-15)的证明：

根据极大似然估计法，不等精度测量值的似然函数为

$$L(x_i, \sigma_i, a, i = 1, 2, \cdots, n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \sigma_i, a)$$

设 $x_i \sim N(a, \sigma_i)$

则

$$f(x_i, \sigma_i, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

$$L(x_i, \sigma_i, a, i = 1, 2, \cdots, n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1}^{n} \sigma_i} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

上式两边取对数

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \ln\sigma_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma_i^2} \tag{6-16}$$

$\ln L$ 为一连续函数，极据极大似然定理，它有极大值，因而有

$$\left.\frac{\partial \ln L}{\partial a}\right|_{a=\bar{x},\ \sigma_i = s_i} = 0$$

即

$$\left.\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - a)^2}{\sigma_i^2}\right)\right|_{a=\bar{x},\ \sigma_i = s_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{s_i^2} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{s_1^2}x_1 + \frac{1}{s_2^2}x_2 + \cdots + \frac{1}{s_n^2}x_n}{\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} + \cdots + \frac{1}{s_n^2}}$$

将上式等号右边分子分母同乘一常数 s^2 得

$$\bar{x}=\frac{\frac{s^2}{s_1^2}x_1+\frac{s^2}{s_2^2}x_2+\cdots+\frac{s^2}{s_n^2}x_n}{\frac{s^2}{s_1^2}+\frac{s^2}{s_2^2}+\cdots+\frac{s^2}{s_n^2}}$$

将式(6-14)代入上式得

$$\bar{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$$

证毕。

3. 计算 $\bar{x}$ 的标准不确定度

$\bar{x}$ 的标准不确定度即为 $\bar{x}$ 的标准差，公式为

$$s_{\bar{x}}=\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}w_i}}=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i^2}}} \tag{6-17}$$

关于式(6-17)的证明：

对式(6-15)求方差有

$$D(\bar{x})=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\right)^2}\sum_{i=1}^{n}w_i^2\cdot D(x_i)$$

因为
$$D(x_i)=\sigma_i^2\approx s_i^2$$

$$s_i^2=\frac{s^2}{w_i}$$

所以
$$D(\bar{x})=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\right)^2}\sum_{i=1}^{n}w_i^2\cdot\frac{s^2}{w_i}$$

$$=\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$$

又因为
$$D(\bar{x}_i)=\sigma_{\bar{x}}^2\approx s_{\bar{x}}^2$$

所以
$$s_{\bar{x}}^2=\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{s^2}{s_i^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i^2}}}$$

证毕。

4. 计算 $\bar{x}$ 的扩展不确定度

由式(6-4)知，$\bar{x}$ 的扩展不确定度为

$$U = k \cdot s_{\bar{x}}$$

k 根据自由度 $\nu = n-1$，置信概率 p 查 t 分布表(见附表)，或根据需要取 $k=2$，$k=3$。

5. 测量结果报告

$\bar{x} \pm U$，ν，p；

或 $\bar{x} \pm U$，ν，k。

【例 6-2】 利用四台测角仪测量同一工件的角度，所得数据及其标准差如下：

$x_1 = 38°47'06''$，$s_1 = 0.2''$

$x_2 = 38°47'11''$，$s_2 = 0.5''$

$x_3 = 38°47'09''$，$s_3 = 0.4''$

$x_4 = 38°47'08''$，$s_4 = 0.4''$

求测量结果($p=95\%$)

解：①计算测量值 x_i 的权 w_i

由式(6-14)知

$$w_i = \frac{s^2}{s_i^2}$$

令 $s^2 = 4''$，得

$$w_1 = 100,\ w_2 = 16,\ w_3 = w_4 = 25$$

②计算最佳估计值 $\bar{x}$

由式(6-15)知

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$= \frac{100\times 38°47'06''+16\times 38°47'11''+25\times 38°47'09''+25\times 38°47'08''}{100+16+25+25}$$

$$= 38°47'7.23''$$

③计算 $\bar{x}$ 的标准差 $s_{\bar{x}}$。

由式(6-17)知

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{0.2^2}+\frac{1}{0.5^2}+\frac{1}{0.4^2}+\frac{1}{0.4^2}}}$$

$$= 0.16''$$

④计算 $\bar{x}$ 的扩展不确定度 U

由式(6-4)知

$$U = k\cdot s_{\bar{x}}$$

k 以自由度 $\nu=4-1=3$，$p=0.95$ 查 t 分布表(见附表)得 $k=3.18$

$$U = 3.18\times 0.16''$$

$$= 0.51''$$

⑤测量结果报告

$$\bar{x}=38°47'07.2''\pm 0.5'',\ \nu=3,\ p=0.95$$

四、已知测量值权的不确定度评定

设 x_i 和其权 w_i 是已知的，$i=1,2,\cdots,n$。

1. 最佳估计值的确定

由式(6-15)知，最佳估计值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

2. $\bar{x}$ 的标准不确定度评定

$\bar{x}$ 的标准不确定度即为 $\bar{x}$ 的标准差。

(1) 计算单位权方差 s^2

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i v_i^2}{n-1} \tag{6-18}$$

关于式(6-18)的证明：

根据式(6-14)有

$$s_i^2=\frac{s^2}{w_i}$$

将上式及 $\sigma_i^2=s_i^2$ 代入式(6-16)式得

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln w_i-\frac{n}{2}\ln s^2-\frac{1}{2s^2}\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\bar{x})^2$$

根据极大似然定理，$\ln L$ 有极大值，因而有

$$\frac{\partial \ln L}{\partial s^2}=0$$

将上式展开

$$\frac{\partial \ln L}{\partial s^2}=-\frac{n}{2}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2s^4}\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\bar{x})^2=0$$

整理上式得

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\bar{x})^2 \tag{6-19}$$

关于式(6 19)是 s^2 有偏估计的证明：

对式(6-19)求数学期望

$$E(s^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_iE(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}w_iEx_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\right)E\bar{x}^2\right]$$

由数理统计理论知

因为　$$Ex_i^2-(Ex_i)^2=\sigma_i^2$$

所以　$$Ex_i^2=\sigma_i^2+(E\bar{x})^2$$

$$=\sigma_i^2+a^2$$

又因为　$$E\bar{x}^2-(E\bar{x})^2=\sigma_{\bar{x}}^2$$

所以　$$E\bar{x}^2=\sigma_{\bar{x}}^2+a^2$$

$$\sigma_i^2=s_i^2=\frac{s^2}{w_i}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$$

将上述式子代入 $E(s^2)$ 中

$$E(s^2)=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{s^2}{w_i}+\sum_{i=1}^{n}w_ia^2-\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i}-\sum_{i=1}^{n}w_ia^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}(ns^2-s^2)$$

$$=\frac{n-1}{n}s^2$$

即
$$E(s^2)\neq s^2$$

所以式(6-19)不能用来估计单位权方差，若将式(6-19)中的$\frac{1}{n}$换成$\frac{1}{n-1}$，

即

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\bar{x})^2$$

此时有

$$E(s^2)=\frac{1}{n-1}(ns^2-s^2)$$

$$=\frac{n-1}{n-1}s^2$$

$$=s^2$$

即式(6-18)是单位权方差的无偏估计，比式(6-19)的效果好。证毕。

(2) $\bar{x}$的标准差$s_{\bar{x}}$。

由式(6-17)知

$$s_{\bar{x}}=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i^2}}}$$

3. $\bar{x}$的扩展不确定度评定

由式(6-4)知

$$U=k\cdot s_{\bar{x}}$$

k根据自由度$\nu=n-1$，置信概率p查t分布表(见附表)得其值。

4. 测量结果报告

$$\bar{x}\pm U,\ \nu,\ p$$

【例6-3】 对某物理量进行6次不等精度测量，测量数据见表6-2。求测量结果($p=0.95$)。

表 6-2

序号	1	2	3	4	5	6	Σ
x_i/mV	10.1	10.2	10.1	10.5	10.4	10.3	
w_i	2	3	1	2	4	5	17
w_ix_i	20.2	30.6	10.1	21.0	41.6	51.5	175
v_i	−0.19	−0.09	−0.19	0.21	0.11	0.01	
$w_iv_i^2$	0.072 2	0.024 3	0.036 1	0.088 2	0.048 4	0.000 5	0.269 7
s_i	0.16	0.13	0.23	0.16	0.12	0.10	

解：①计算最佳估计值 $\bar{x}$

由式(6-15)知

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}=\frac{175}{17}=10.29\text{mV}$$

②计算单位权方差 s^2

由式(6-18)知

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_iv_i^2}{n-1}$$

$$v_i=x_i-\bar{x},\ i=1,2,\cdots,n$$

v_i 值见表 6-2。

$$s^2=\frac{0.269\ 7}{6-1}=0.053\ 94$$

$$s=0.23\text{mV}$$

③计算 $\bar{x}$ 的标准差 $s_{\bar{x}}$

由式(6-17)知

$$s_{\bar{x}}=\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}w_i}}=\frac{0.23}{\sqrt{17}}=0.06\text{mV}$$

④计算 $\bar{x}$ 的扩展不确定度 U

由式(6-4)知

$$U=k\cdot s_{\bar{x}}$$

k 以自由度 $\nu=6-1=5$，$p=0.95$ 查 t 分布表(见附表)得 $k=2.57$

$$U=2.57\times0.06$$
$$=0.15\text{mV}$$

⑤测量结果报告

$$\bar{x}=(10.3\pm0.2)\text{mV},\ \nu=5,\ p=0.95$$

若需要计算各测量值的标准差 s_i，可根据式(6-14)得

$$s_i=\frac{s}{\sqrt{w_i}}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

s_i 的值见表 6-2。

【例 6-4】 对某物理量进行 9 次直接测量，数据见表 6-3。求测量结果($k=3$)。

表 6-3

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i/mV	550	473	428	446	479	418	469	528	465
s_i/mV	50	50	50	36	14	29	24	30	23

解：①计算测量值的权 w_i：

由式(6-14)知

$$w_i=\frac{s^2}{s_i^2}$$

令单位权标准差 $s=50$ 得各测量值的权为

$$w_1:w_2:w_3:w_4:w_5:w_6:w_7:w_8:w_9$$
$$=1:1:1:1.93:12.8:2.97:4.34:2.78:4.73$$

②计算最佳估计值 $\bar{x}$

由式(6-15)知

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$$
$$=472.7\text{mV}$$

③计算 $\bar{x}$ 的标准差 $s_{\bar{x}}$

$s_{\bar{x}}$ 的计算方法有两种：

第一种方法：根据式(6-17)得

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i}} = 8.77\text{mV}$$

第二种方法：根据式(6-18)和式(6-17)得

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i v_i^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} w_i}} = \sqrt{\frac{27\ 588}{(9-1)\times 32.55}} = 10.29\text{mV}$$

④计算 $\bar{x}$ 的扩展不确定度 U

由式(6-4)知

$$U = k \cdot s_{\bar{x}}$$

第一种方法：

$$U = 3\times 8.77 = 26.31\text{mV}$$

第二种方法：

$$U = 3\times 10.29 = 30.87\text{mV}$$

⑤测量结果报告

第一种方法：

$$\bar{x} = (472.7\pm 26.3)\text{mV},\ k=3,\ \nu=8$$

第二种方法：

$$\bar{x} = (472.7\pm 30.9)\text{mV},\ k=3,\ \nu=8$$

例 6-3 表明，当已知测量值 x_i 和其标准差 s_i 时，有两种方法计算 $\bar{x}$ 的标准差 $s_{\bar{x}}$：第一种方法是根据式(6-17)计算 $s_{\bar{x}}$；第二种方法是根据式(6-18)和式(6-17)计算 $s_{\bar{x}}$。这两种方法计算出的 $s_{\bar{x}}$ 在理论上不相等。两种方法的区别是：第一种方法是根据已知的 s_i 计算 $s_{\bar{x}}$，没有用到测量数据 x_i；第二种方法既用到 s_i，也用到了测量数据 x_i，当测量次数较多时，这种方法更能准确地反映出这一组测量数据的不确定度值，也更具有实验性质。因此，当测量次数 $n<6$ 次时，用式(6-17)计算 $s_{\bar{x}}$ 效果较好；当测量次数 $n\geqslant 6$ 次时，或当测量数据含有系统误差时，用式(6-18)和式(6-17)计算 $s_{\bar{x}}$ 更为科学合理。

习题六

6-1 什么是等精度测量？什么是不等精度测量？

6-2 已知某仪器测量的标准差为 0.5μm。

(1) 若用该仪器对某一轴径测量一次，得到的测量值为 26.202 5mm，试写出测量结果($k=2$)。

(2) 若重复测量 10 次，测量值如下表所示：

序号	1	2	3	4	5
x_i/mm	26.202 6	26.202 5	26.0202 8	26.202 8	26.202 5
序号	6	7	8	9	10
x_i/mm	26.202 2	26.202 3	26.202 5	26.202 6	26.202 2

试写出测量结果($k=2$)。

(3) 若手头无该仪器的测量标准差，(2)问中的测量结果为多少？($p=0.95$)。

6-3 用某仪器测量工件尺寸，已知该仪器的标准差 $s=0.01$mm，若要求测量结果的标准不确定度不超过 0.001mm，应测量多少次？

6-4 对某角度 α 进行测量，得到两个测量结果：

α_1：24°13′36″±6.2″　$k=2$；

α_2：24°13′24″±15.0″　$k=3$；

试计算 α 的最终测量结果($k=3$)。

6-5 对某玻璃棱镜的折射系数进行测定，测量数据如下表所示：

序号	1	2	3	4	5
x /mm	1.53	1.57	1.51	1.54	1.50
权 w_i	1	2	3	3	1
序号	6	7	8	9	10
x_i /mm	1.51	1.55	1.54	1.56	1.53
权 w_i	1	3	3	2	1

试计算测量结果($p=0.99$)。

6-6 对某量进行测量，数据如下表所示：

序号	1	2	3	4	5
x_i/mA	5.60	5.58	5.63	5.60	5.70
s_i/mA	0.05	0.02	0.03	0.04	0.06

续表

序号	6	7	8	9	10
x_i/mA	5.67	5.59	5.62	5.60	5.65
s_i/mA	0.06	0.04	0.02	0.03	0.03

注：s_i 为 x_i 的标准差。

(1) 用式(6-17)计算测量结果($p=0.95$)。

(2) 用式(6-18)计算测量结果($p=0.95$)。

(3) 分析(1)、(2)的计算结果。

第7章 间接测量不确定度评定

任何测量数据都具有不确定度。测量方法一般可分为直接测量法和间接测量法，在直接测量不能满足测量精度要求或无法进行直接测量时，常采用间接测量的方法。间接测量是通过直接测量与被测量之间有一定的函数关系的其他量，再按照一定的函数关系计算出被测量的测量方法。因此，间接测量的量是直接测量所得到的各个测量值的函数。而间接测量的不确定度则是各个直接测量不确定度的合成不确定度。因而，间接测量数据处理的核心问题是间接测量不确定度的评定。本章将就间接测量不确定度的评定、分配、合成以及最佳测量方案的选择等问题加以讨论。

第一节 间接测量不确定度的评定

一、间接测量标准不确定度评定的基本公式

1. 间接测量误差传播的基本公式

在间接测量中，函数的形式主要为初等函数，且一般为多元函数，设其表达式为

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{7-1}$$

式中：x_1，x_2，…，x_n——各个直接测量值；

y——间接测量值。

由多元函数的微分学可知，对于多元函数，其增量可用函数的全微分表示。则 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的函数增量 $\mathrm{d}y$ 为

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

若以 $\Delta y=y-y_0$ 表示间接测量值的误差，以 $\Delta x=x_i-x_0$ 表示各个直接测量值的误差，并分别以 Δy，Δx 近似代替全微分公式中的 dy，dx_i，则可得间接测量误差传播的基本公式

$$\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{7-2}$$

式中：$\frac{\partial f}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}$，…，$\frac{\partial f}{\partial x_n}$——各个直接测量值误差的灵敏系数。

当 x_i 的测量误差是系统误差时，式(7-2)也可认为是系统误差传播的基本公式。

当 x_i 的测量误差是随机误差时，则随机误差传播的基本公式为

$$\delta y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n \tag{7-3}$$

式中：δ_{x_1}，δ_{x_2}，…，δ_{x_n}——各直接测量值的随机误差；

δ_y——y 的随机误差。

在间接测量中，对于形如

$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=Cx_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}$ [C、$p_i(i=1,2,\cdots n)$是常数]

的测量函数，以相对误差表示其误差传播的基本公式，更为方便。若 $y\neq0$、$x_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$，将式(7-2)的两端同除以 y 得

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n$$

而

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x_i}=\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{y}&=\frac{\partial \ln y}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial \ln y}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial \ln y}{\partial x_n}\Delta x_n\\&=x_1\frac{\partial \ln y}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{x_1}+x_2\frac{\partial \ln y}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial \ln y}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{x_n}\end{aligned}$$

若令

$$r_y=\frac{\Delta y}{y},\ r_{xi}=\frac{\Delta x_i}{x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则

$$r_y=x_1\frac{\partial \ln y}{\partial x_1}r_{x1}+x_2\frac{\partial \ln y}{\partial x_2}r_{x2}+\cdots+x_n\frac{\partial \ln y}{\partial x_n}r_{xn} \tag{7-4}$$

对于间接测量的函数关系

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=Cx_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}$$

有

$$\ln y=\ln C+p_1\ln x_1+p_2\ln x_2+\cdots+p_n\ln x_n$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}=p_i\cdot\frac{1}{x_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

于是式(7-4)转化为

$$r_y=p_1r_{x1}+p_2r_{x2}+\cdots+p_nr_{xn}\tag{7-5}$$

式中：　　r_y——间接测量值的相对误差；

r_{x1}，r_{x2}，…，r_{xn}——直接测量值的相对误差。

式(7-5)即为相对误差传播的基本公式。此时，灵敏系数

$$c_i=p_i\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

【例 7-1】 用弓高弦长法测量大直径 D，见图 7-1。直接测量其弓高 h 和弦长 l，然后通过函数关系计算出直径 D。若已知弓高 h 和弦长 l 的测量值及其系统误差为

$$h=50\text{mm},\ \Delta h=-0.1\text{mm}$$

$$l=500\text{mm},\ \Delta l=1\text{mm}$$

试求测量结果。

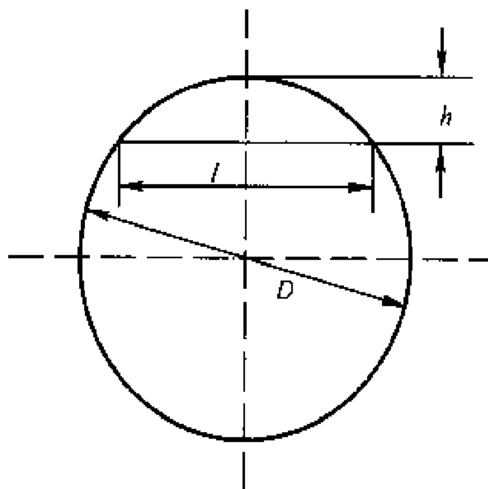


图 7-1

解：如图 7-1，可知函数关系为

$$D=\frac{l^2}{4h}+h$$

若不考虑测量值的系统误差，则计算出的直径 D_0 为

$$D_0=\frac{l^2}{4h}+h=\frac{500^2\text{mm}^2}{4\times 50\text{mm}}+50\text{mm}=1\ 300\text{mm}$$

由于
$$D=f(l,h)$$

故各个误差的灵敏系数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{l}{2h}=\frac{500\text{mm}}{2\times 50\text{mm}}=5$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}=-\left(\frac{l^2}{4h^2}-1\right)=-\left(\frac{500^2\,\mathrm{mm}^2}{4\times50^2\,\mathrm{mm}^2}-1\right)=-24$$

所以，由式(7-2)可得为

$$\Delta D=\frac{\partial f}{\partial l}\Delta l+\frac{\partial f}{\partial h}\Delta h=\frac{l}{2h}\Delta l-\left(\frac{l^2}{4h^2}-1\right)\Delta h$$

$$=5\times1\mathrm{mm}-24\times(-0.1\mathrm{mm})=7.4\mathrm{mm}$$

用加修正值的方法可消除所求得的直径的系统误差 ΔD，则被测直径的实际尺寸为

$$D=D_0-\Delta D=1\,300\mathrm{mm}-7.4\mathrm{mm}=1\,292.6\mathrm{mm}$$

2. 间接测量标准不确定度评定的基本公式

在重复性测量中，测量误差往往是随机误差，而随机误差又是用表征其取值分散性的标准不确定度来评定的。标准不确定度是用标准差表示的不确定度，故间接测量标准不确定度评定实质上就是确定间接测量的标准差。因而，我们将在随机误差传播基本公式的基础上推导出间接测量标准差传播的基本公式，也就是间接测量标准不确定度评定的基本公式。

设间接测量的函数关系为

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

对各测量值都进行 N 次等精度测量，其相应的随机误差为

$$\begin{aligned}&\text{对 } x_1:\ \delta x_{11},\ \delta x_{12},\ \cdots,\ \delta x_{1N}\\&\text{对 } x_2:\ \delta x_{21},\ \delta x_{22},\ \cdots,\ \delta x_{2N}\\&\qquad\vdots\\&\text{对 } x_n:\ \delta x_{n1},\ \delta x_{n2},\ \cdots,\ \delta x_{nN}\end{aligned}$$

根据式(7-3)可得 y 的随机误差为

$$\left.\begin{aligned}\delta y_1&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{11}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{21}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_{n1}\\\delta y_2&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{12}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{22}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_{n2}\\&\ \ \vdots\\\delta y_N&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{1N}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{2N}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{nN}}\end{aligned}\right\}\tag{7-6}$$

将方程组(7-6)中各方程平方得

$$
\left.\begin{aligned}
\delta y_1^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{11}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{21}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta x_{n1}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_{i1}\delta x_{j1} \\
\delta y_2^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{12}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{22}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta x_{n2}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_{i2}\delta x_{j2} \\
&\vdots \\
\delta y_N^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{1N}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{2N}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta x_{nN}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_{iN}\delta x_{jN}
\end{aligned}\right\}
\tag{7-7}
$$

将方程组(7-7)中各方程相加，可得

$$
\begin{aligned}
&\delta y_1^2 + \delta y_2^2 + \cdots + \delta y_N^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\delta x_{11}^2 + \delta x_{12}^2 + \cdots + \delta x_{1N}^2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\delta x_{21}^2 + \delta x_{22}^2 + \cdots + \delta x_{2N}^2) + \\
&\quad \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 (\delta x_{n1}^2 + \delta x_{n2}^2 + \cdots + \delta x_{nN}^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_{im}\delta_{jm}\right)
\end{aligned}
\tag{7-8}
$$

将式(7-8)的各项除以 N，并根据方差的定义可得

$$
\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\sum_{m=1}^{N}\delta x_{im}\delta x_{jm}}{N}\right]
\tag{7-9}
$$

若定义 δx_i 与 δx_j 的协方差为 $K_{ij} = \dfrac{\sum_{m=1}^{N}\delta x_{im}\delta x_{jm}}{N}$

δx_i 与 δx_j 的相关系数为 $\rho_{ij} = \dfrac{K_{ij}}{\sigma_{xi}\sigma_{xj}}$

则

$$K_{ij} = \rho_{ij}\sigma_{xi}\sigma_{xj}$$

相关系数 ρ_{ij} 是两个变量之间相互依赖性的度量，描述了两个变量之间线性关系的紧密程度。ρ_{ij} 是一个纯数：$-1\leqslant\rho_{ij}\leqslant+1$。由于协方差通常具有不方便的量纲，因而相关系数通常比协方差更有用。若 $\rho_{ij}=0$，则两个变量之间相互独立；若 $|\rho_{ij}|=1$，则两变量 x_i 与 x_j 间以概率 1 成立 $x_i=ax_j+b(a,\ b\in\mathbf{R}\ a\neq0)$。

于是由式(7-9)可得

$$
\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}\sigma_{xi}\sigma_{xj}\right)
\tag{7-10}
$$

若以实验方差 s^2 估计方差 σ^2，则由式(7-10)可得间接测量实验标准差

传播的基本公式：

$$s_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_{x1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_{x2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 s_{xn}^2+2\sum_{1\leqslant i<j}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}s_{xi}s_{xj}\right)}\tag{7-11}$$

式中：ρ_{ij}——第 i 个测量值的不确定度和第 j 个测量值的不确定度之间的相关系数；

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$——各个测量值不确定度的灵敏系数。

若各测量值的随机误差是相互独立的，且当 N 适当大时，协方差

$$K_{ij}=\frac{\sum_{m=1}^{N}\delta x_{im}\delta x_{jm}}{N}=0$$

则相关系数 ρ_{ij} 也为零，间接测量实验标准差传播的基本公式(7-11)可简化为

$$s_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_{x1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_{x2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 s_{xn}^2}\tag{7-12}$$

若在 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中，已知各直接测量值 x_i 的实验标准差 s_i 以及 x_i 和 x_j 的相关系数 ρ_{ij}，则由式(7-11)可得间接测量标准不确定度评定的基本公式为

$$u_c=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 s_n^2+2\sum_{1\leqslant i<j}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}s_is_j\right)}\tag{7-13}$$

式中：u_c——间接测量值 y 的合成标准不确定度。

若相关系数 ρ_{ij} 为零，则间接测量标准不确定度评定的基本公式(7-13)可简化为

$$u_c=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 s_n^2}\tag{7-14}$$

由于各测量值的不确定度间相互独立的情况较为常见，且当各相关系数很小时，也可近似地作为相互独立处理。因而，式(7-14)是较常用的间接测量标准不确定度评定的基本公式。

若令　　$c_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$，$c_i$ 为 x_i 的不确定度的灵敏系数；

$u_i=|c_i|s_i$，u_i 为 x_i 引起的标准不确定度分量。

则式(7-13)为

$$u_c=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2+2\sum_{1\leqslant i<j}^{n}\rho_{ij}u_iu_j}\tag{7-15}$$

即 y 的标准不确定度 u_c 是由各标准不确定度分量 u_i 按式(7-15)合成而得，故称 u_c 为合成标准不确定度。式(7-15)称为“不确定度传播律”。

在间接测量中，对于形如

$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=Cx_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}$　[C，$p_i(i=1, 2, \cdots n)$是常数]

的测量函数，若各直接测量值间相互独立，由相对不确定度传播的基本公式(7-5)容易得知

$$u_{crel}=\sqrt{(p_1u_{rel1})^2+(p_2u_{rel2})^2+\cdots+(p_nu_{reln})^2} \tag{7-16}$$

式中：　u_{crel}——y 的相对合成标准不确定度，$u_{crel}=\frac{u_c}{y}$；

$u_{reli}(i=1, 2, \cdots, n)$——$x_i$ 的相对标准不确定度，$u_{reli}=\frac{s_i}{x}(i=1, 2, \cdots, n)$。

若相关系数 $\rho_{ij}=0$，则式(7-15)为

$$u_c=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2} \tag{7-17}$$

若相关系数 $\rho_{ij}=1$，则式(7-15)为

$$\begin{aligned} u_c&=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2+2\sum_{1\le i<j}^{n}u_iu_j} \\ &=\sqrt{(u_1+u_2+\cdots+u_n)^2} \\ &=u_1+u_2+\cdots+u_n \end{aligned} \tag{7-18}$$

3. 误差间的相关关系和相关系数

由式(7-15)、(7-17)、(7-18)可知，各误差间的相关性对合成标准不确定度的计算有直接影响。式(7-9)中的相关项刻画了各误差相互间的线性关联对函数总误差影响的大小。当相关系数 $\rho_{ij}=0$ 时，式(7-15)简化为(7-17)；而当相关系数 $\rho_{ij}=1$ 时，式(7-15)则简化为(7-18)。式(7-18)表明，当相关系数 $\rho_{ij}=1$ 时，间接测量的标准不确定度具有线性的传播关系。

上述分析结果充分说明，误差间的相关性与标准不确定度的合成有密切关系。尽管通常遇到的测量实践大多是误差间线性无关或近似线性无关，但线性相关的也较常见。当各误差间相关或相关性不能忽视时，必须先求出各个误差间的相关系数，然后才能进行标准不确定度合成计算。因此，正确处理误差间的相关问题，具有十分重要的意义。

(1) 误差间的线性相关关系

误差间的线性相关关系是指它们具有线性依赖关系，这种依赖关系或强或弱。联系最强时，在平均意义上，一个误差的取值完全决定了另一个误差的取值，此时，两误差间具有确定的线性函数关系。当两误差间的线性依赖关系最弱时，一个误差的取值与另一个误差的取值完全无关，这是互不相关的情况。

当两误差间的关系是处于上述两种极端情况之间，即既有联系又不具有确定的相关关系时，线性依赖关系是指平均意义上的线性关系，即一个误差值随另一个误差值的变化具有线性关系的倾向，但两者的取值又不服从确定的线性关系，而具有一定的随机性。

（2）相关系数

两误差间有线性依赖关系时，其相关性强弱由相关系数来反映，在标准不确定度合成时应求得相关系数，并计算出相关项的大小。

若两误差ξ与η之间的相关系数为ρ。根据相关系数的定义，则有

$$\rho=\frac{K_{\xi\eta}}{s_\xi s_\eta}=\frac{D_{\xi\eta}}{s_\xi s_\eta}$$

式中：$D_{\xi\eta}$——误差ξ与η之间的协方差；

s_ξ，s_η——分别为误差ξ与η的实验标准差。

由概率论可知，相关系数ρ是一个纯数，其取值范围为

$$-1\leqslant\rho\leqslant+1$$

当$0<\rho<1$时，两误差ξ与η正相关，即一误差增大时，另一误差的取值平均地增大；

当$-1<\rho<0$时，两误差ξ与η负相关，即一误差增大时，另一误差的取值平均地减小；

当$\rho=+1$时，两误差ξ与η完全正相关；$\rho=-1$时，两误差ξ与η完全负相关；此时，两误差ξ与η之间存在确定的线性函数关系；

当$\rho=0$时，两误差ξ与η之间无线性关系或称不相关，即一误差增大时，另一误差的取值可能平均地增大也可能平均地减小。

由此可知，相关系数确实可表示两误差ξ与η之间线性相关的紧密程度，相关系数ρ愈接近0，ξ与η之间的线性相关程度愈小；反之，$|\rho|$取值愈大、愈接近1，ξ与η之间的线性相关程度愈密切。需要强调的是，相关系数只表示两误差ξ与η之间线性关系的紧密程度，当相关系数ρ很小甚至等于0时，两误差ξ与η之间不存在线性关系，但并不表示它们之间不存在其他的函数关系。

实际使用中，通常使用相关系数ρ的估计值r，$r=\frac{s_{\xi\eta}}{s_\xi s_\eta}$。其取值范围亦为

$$-1\leqslant r\leqslant+1$$

4. 误差间相关系数的确定

确定两误差之间的相关系数是比较难的，通常采用的确定相关系数的方法有如下几种：

（1）直接判断法

通过两误差之间关系的分析，直接确定相关系数ρ。如两误差不可能有

联系或联系很微弱，则确定 $\rho=0$；若一个误差增大，另一个误差成比例地增大，则确定 $\rho=1$。

（2）试验观察和简略计算法

在某些情况下可直接测量两误差的多组对应值(ξ_i, η_i)，用观察和简略计算法求得相关系数 ρ。

①观察法　用多组测量的对应值(ξ_i, η_i)作图，将它与图 7-2 的标准图形相比，看它与哪一图形相近，从而确定相关系数的近似值。使用此方法应注意要有足够多的数据($n \geqslant 20$)，且作图时应注意坐标轴的分度(横坐标最小值到最大轴的距离大致等于纵坐标最小值到最大值的距离)。

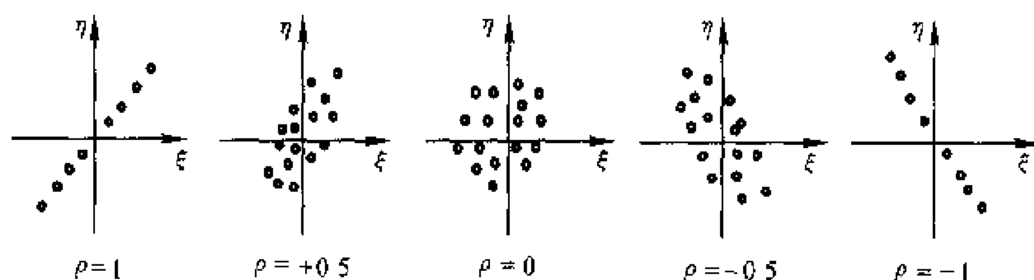


图 7-2

②简略计算法　将多组测量的对应值(ξ_i, η_i)在平面坐标上作图，如图 7-3 所示，然后作平行于纵轴的直线 A 将点阵左右均分，再作平行于纵轴的直线 B 将点阵上下均分，并尽量使 A、B 线上无点，于是将点阵分为四部分，设各部分的点数分别为 n_1，n_2，n_3，n_4，则可以证明相关系数为

$$\rho \approx -\cos\left[\frac{n_1+n_3}{\sum n}\pi\right] \tag{7-19}$$

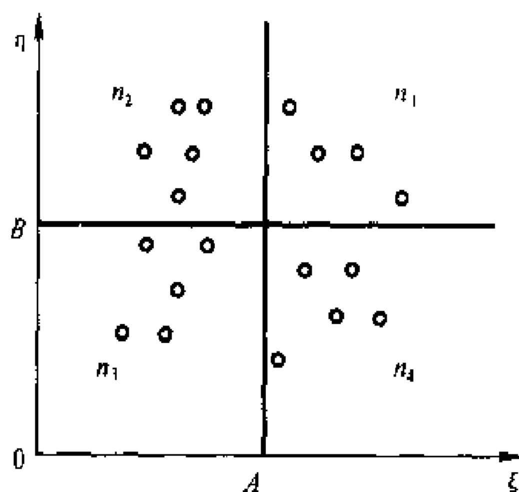


图 7-3

③直接计算法　根据多组测量的对应值(ξ_i, η_i)，按相关系数的定义直接计算得

$$\rho = \frac{\sum(\xi_i - \bar{\xi})(\eta_i - \bar{\eta})}{\sqrt{\sum(\xi_i - \bar{\xi})^2 \sum(\eta_i - \bar{\eta})^2}} \tag{7-20}$$

（3）理论计算法

有些误差间的相关系数，可根据概率论和最小二乘法直接求出。

如果求得两误差 ξ 与 η 之间为线性相关，即 $\xi = a\eta + b$，则相关系数为

$$\rho = \begin{cases} +1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases} \tag{7-21}$$

以上讨论了两误差之间的相关系数的各种求法，根据具体情况可采用不同的方法。一般先在理论上探求，若达不到目的，对于数值小或一般性的误差间的相关系数可用直接判断法；对于数值大或重要的误差间的相关系数可采用多组成对观察，并根据情况采用不同的计算方法。

二、间接测量标准不确定度的评定方法与步骤

当间接测量的测量结果受多种因素影响形成了若干个不确定度分量时，测量结果的标准不确定度用各标准不确定度分量合成后所得的合成标准不确定度 u_c 表示。为了求得 u_c，需分析各种影响因素与测量结果的关系，以便准确评定各标准不确定度分量 u_i，然后再按如下方法与步骤进行间接测量标准不确定度评定。

设间接测量的函数关系为

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

式中：　　y——间接测量量；

$x_1, x_2, \cdots, x_n$——直接测量量。

那么，间接测量标准不确定度按如下方法与步骤进行评定。

1. 间接测量最佳估计值的计算

我们在第五章第一节“五、测量过程的数学模型的建立”中已谈到间接测量最佳估计值的计算方法有两种，即“函数的均值”（式5-4）和“均值的函数”（式5-5），也谈到当 f 是 X_i 的非线性函数时，式(5-4)的计算方法较优越（可以从无偏性、有效性、一致性、实用性等思路进行证明，证明方法目前尚存在异议），尽管计算方法有差异，但是计算方法一经确定后，其不确定度的评定步骤是依数学模型进行的。对以式(5-4)计算的结果的评定，先对各分量单次测量值按函数关系求各函数值的残差，算得函数值单次测量的标准差，再求算术平均值的标准差，即算术平均值标准不确定度。对以式(5-5)计算的结果的评定，先求各分量算术平均值的不确定度再按函数关系求得合成标准不确定度。

下面以式(5-5)为例进行讲解。

先将各直接测量量 x_i 的最佳估计值 $\bar{x}_i(i=1, 2, \cdots, n)$计算出来代人间接测量的函数关系式，则间接测量最佳估计值

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \tag{7-22}$$

2. 合成标准不确定度的评定

根据式(7-15)，合成标准不确定度 u_c 的评定，按如下步骤进行：

(1) 计算各标准不确定度分量 u_i

$$u_i = |c_i| s_i$$

$$c_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = \bar{x}_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

(2) 确定各标准不确定度分量 u_i 的自由度 ν_i；

(3) 若存在相关关系，则应设法确定相关系数 ρ_{ij} 的值；

(4) 按式(7-15)计算合成标准不确定度 u_c，即

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j}^{n} \rho_{ij} u_i u_j}$$

至于其他形式的合成标准不确定度的评定，则按式(7-16)、(7-17)、式(7-18)进行。

3. 扩展不确定度评定

合成标准不确定度可以表示测量结果的不确定度，但它仅对应于标准差，当概率分布是正态分布时，由其表示的测量结果 $\bar{y} \pm u_c$ 包含被测量真值的概率仅为 68.27%。然而，这在实际工作中是无法满足比如高精度比对以及一些与安全生产和与人体健康有关的测量的要求的。这些测量要求给出的测量结果区间包含被测量真值的置信概率较大，即给出一个测量结果的区间，使被测量的值大部分位于其中。为此需用扩展不确定度(也叫展伸不确定度)表示测量结果。

(1) 扩展不确定度由合成标准不确定度 u_c 乘以包含因子 k 得到，记为 U。即

$$U = k u_c \tag{7-23}$$

用扩展不确定度作为测量不确定度，则测量结果表示为

$$Y = \bar{y} \pm U, k \tag{7-24}$$

(2) 当概率分布是正态分布时，包含因子 k_p 由 t 分布的临界值 $t_p(\nu)$确定。即

$$k_p = t_p(\nu) \tag{7-25}$$

则扩展不确定度由合成标准不确定度 u_c 乘以包含因子 $k_p = t_p(\nu)$得到，记为

U_p，即

$$U_p = k_p u_c \tag{7-26}$$

那么，用扩展不确定度作为测量不确定度，测量结果表示为

$$Y = \bar{y} \pm U_p,\ p,\ \nu_{eff} \tag{7-27}$$

式(7-25)中，ν 是合成标准不确定度 u_c 的自由度，我们称之为有效自由度。记为 ν_{eff}。根据给定的置信概率 p 与自由度 ν 查 t 分布表，可得 $t_p(\nu)$的值。当各标准不确定度分量 u_i 相互独立时，合成标准不确定度 u_c 的自由度 ν 由下述韦尔奇-萨特思韦特(Welch－Satterthwaite)公式计算：

$$\nu = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^4}{\nu_i}} \tag{7-28}$$

式中：ν_i——各标准不确定度分量 u_i 的自由度。

显然，当各标准不确定度分量 u_i 的自由度 ν_i 均已知时，才能由式(7-28)计算合成标准不确定度 u_c 的自由度 ν。但往往由于缺少资料难以确定每一个分量的 ν_i，则自由度 ν 无法按式(7-28)计算，也不能按式(7-25)来确定包含因子 k 的值。为了求得扩展不确定度，一般情况下，可取包含因子 k＝2～3。

4. 给出测量不确定度报告

对间接测量不确定度进行评定后，应该给出测量不确定度的最后报告。测量不确定度的最后报告的形式为式(7-24)或式(7-27)，即

$$Y=\bar{y}\pm U,\ k \text{ 或 } Y=\bar{y}\pm U_p,\ p,\ \nu_{eff}$$

三、实例

(一) 间接测量不确定度计算步骤

(1) 分析间接测量不确定度的来源，列出对测量结果影响显著的不确定度分量；

(2) 评定各标准不确定度分量，并给出其数值 u_i 和自由度 ν_i；

(3) 分析所有不确定度分量的相关性，确定各相关系数 r_{ij}；

(4) 求测量结果的合成标准不确定度 u_c 和自由度 ν_{eff}；

(5) 若需要给出扩展不确定度，则将合成标准不确定度 u_c 乘以包含因子 k 或 k_p，得扩展不确定度，即

$$U=ku_c \text{ 或 } U_p=k_p u_c$$

(6) 给出测量不确定度的最后报告，以规定的方式报告被测量的估计值 $\bar{y}$ 及扩展不确定度 $U=ku_c$ 或 $U_p=k_pu_c$，并说明获得它们的细节。

根据以上间接测量不确定度计算步骤，下面通过实例说明不确定度评定方法的应用。

（二）实例

【例 7-2】 体积测量的不确定度计算

1. 测量方法

直接测量圆柱体的直径 D 和高度 h，由函数关系式计算出圆柱体的体积

$$V=\frac{\pi D^2}{4}=h$$

由分度值为 0.01mm 的测微仪重复 6 次测量直径 D 和高度 h，测得数据如下：

D_i/mm	10.075	10.085	10.095	10.060	10.085	10.080
h_i/mm	10.105	10.115	10.115	10.115	10.110	10.110

计算直径 D 和高度 h 的测量平均值得：$\overline{D}=10.080\text{mm}$，$\overline{h}=10.110\text{mm}$，则体积 V 的测量结果估计值为

$$\overline{V}=\frac{\pi\overline{D}^2}{4}\overline{h}=806.8\text{mm}^3$$

2. 不确定度评定

分析测量方法可知，对体积 V 的测量不确定度影响显著的因素主要有：直径和高度的测量重复性引起的不确定度 u_1，u_2；测微仪示值误差引起的不确定度 u_3。分析这些不确定度的特点可知，不确定度 u_1，u_2 应采用 A 类评定方法，不确定度 u_3 应采用 B 类评定方法。

下面分别计算各主要因素引起的不确定度分量。

（1）直径 D 的测量重复性引起的不确定度分量 u_1

由直径 D 的 6 次测量值求得平均值的实验标准差 $s_{\overline{D}}=0.004\ 8\text{mm}$，则直径 D 的测量标准不确定度 $u_D=s_{\overline{D}}=0.004\ 8\text{mm}$，而直径 D 的灵敏系数 $c_D=\frac{\partial V}{\partial D}=\frac{\pi D}{2}h$，故由直径 D 的测量重复性引起的不确定度分量为

$$u_1=|c_D|u_D=\left|\frac{\partial V}{\partial D}\right|u_{\overline{D}}=0.77\text{mm}^3$$

其自由度为 $\nu_1=6-1=5$。

（2）高度 h 的测量重复性引起的不确定度分量 u_2

由高度 h 的 6 次测量值求得平均值的实验标准差 $s_{\overline{h}}=0.002\ 6\text{mm}$，则

直径 D 的测量标准不确定度 $u_h=s_{\bar{h}}=0.0026\text{mm}$，而高度 h 的灵敏系数 $c_h=\frac{\partial V}{\partial h}=\frac{\pi D^2}{4}$，故由高度 h 的测量重复性引起的不确定度分量为

$$u_2=|c_h\ u_h=\left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|u_h=0.21\text{mm}^3$$

其自由度为 $\nu_2=6-1=5$。

(3) 测微仪示值误差引起的不确定度分量 u_3

由仪器说明书获得测微仪的示值误差范围 $\pm 0.01\text{mm}$，0.01mm 为其半宽，取均匀分布，则可计算得测微仪示值标准不确定度 $u_{仪}=\frac{0.01}{\sqrt{3}}=0.0058\text{mm}$，由此引起的直径和高度测量的标准不确定度分量分别为

$$u_{3D}=\left|\frac{\partial V}{\partial D}\right|u_{仪},\ u_{3h}=\left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|u_{仪}$$

则测微仪示值误差引起的体积测量不确定度分量为

$$u_3=\sqrt{(u_{3D})^2+(u_{3h})^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2}u_{仪}=\sqrt{\left(\frac{\pi D}{2}h\right)^2+\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}u_{仪}$$
$$=1.04\text{mm}$$

若合格千分尺的示值不确定度为 0.01mm，其自由度 ν_3 应是 ∞。

3. 不确定度合成

因不确定度分量 u_1，u_2，u_3 相互独立，即 $\rho_{ij}=0$，按式(7-17)得体积测量的合成标准不确定度

$$u_c=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}=\sqrt{0.77^2+0.21^2+1.04^2}\ \text{mm}^3=1.3\text{mm}$$

按式(7-28)计算其自由度得

$$\nu_{\text{eff}}=\frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{3}\frac{u_i^4}{\nu_i}}=\frac{1.3^4}{\frac{0.77^4}{5}+\frac{0.21^4}{5}+\frac{1.04^4}{\infty}}\approx 40.4,\ \text{取}\ \nu_{\text{eff}}=40$$

4. 扩展不确定度

取置信概率 $p=0.95$，自由度 $\nu=40$ 查 t 分布表得 $t_{0.95}(40)=2.02$，即包含因子 $k_{0.95}=2.02$，于是，体积测量的扩展不确定度为

$$U_{0.95}=k_{0.95}u_c=2.02\times 1.3\text{mm}^3=\approx 2.6\text{mm}^3$$

5. 不确定度报告

(1) 用合成标准不确定度评定体积测量的不确定度，则测量结果为

$$\overline{V}=806.8\text{mm}^3,\ u_c=1.3\text{mm}^3$$

(2) 用扩展不确定度评定体积测量的不确定度，则测量结果为

$$\overline{V}=(806.8\pm 2.6)\text{mm}^3,\ \nu=40$$

其中±符号后的数值是扩展不确定度 $U_{0.95}=k_{0.95}u_c=2.6\text{mm}^3$，是由合成标准不确定度 $u_c=1.3\text{mm}^3$，自由度 $\nu=8$ 及包含因子 $k_{0.95}=t_{0.95}(40)=2.02$ 确定的，从而具有约为 95%概率的置信区间。

第二节 合成标准不确定度的分配

在间接测量的数据处理中，合成标准不确定度分配是在已知测量的合成标准不确定度的情况下，要求合理地确定各个不确定度分量的值，以保证测量精度。合成标准不确定度分配时，应考虑测量过程中所有不确定度分量，既不能多也不能少。且分配后的各个不确定度分量 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$的值应满足

$$u_c \geqslant \sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2} \tag{7-29}$$

合成标准不确定度分配在测量方案的选择和仪器的设计过程中有着重要的作用和意义。下面我们介绍合成标准不确定度的分配方法和步骤。

一、按等作用原则分配合成标准不确定度

所谓等作用原则，就是认为各个不确定度分量对合成标准不确定度的贡献是相等的。

若间接测量的函数关系为

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

且设各不确定度分量互不相关，即相关系数 $\rho_{ij}=0$，则由式(7-17)可知

$$u_c=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$$

根据等作用原则，应有

$$u_1=u_2=\cdots=u_n$$

于是

$$u_c=\sqrt{nu_i^2}=\sqrt{n}u_i=\sqrt{n}|c_i|s_i$$

所以

$$u_i=\frac{u_c}{\sqrt{n}} \tag{7-30}$$

或

$$s_i=\frac{u_c}{|c_i|\sqrt{n}} \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{7-31}$$

式中：s_i——第 i 项不确定度分量的实验标准差；

$c_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$——第 i 项不确定度分量的灵敏系数。

显然，若各直接测量值的误差满足式(7-30)、(7-31)，则一定能使式(7-29)成立。

二、按可能性调整分配后的不确定度

按等作用原则分配合成标准不确定度后，极可能出现不合理的情况，这是因为计算出来的各个不确定度分量都相等，对于其中有些直接测量值，要保证它的测量不确定度不超出允许的范围，较为容易。而对于其中有些直接测量值，则难以保证它的测量不确定度满足要求，不超出允许的范围。如果硬要保证其测量精度要求，势必要用昂贵的高精度仪器，或者要付出较大的劳动。

此外，由式(7-31)可以看出，当各个不确定度分量一定时，实验标准差 s_i 与灵敏系数 $|c_i|$ 成反比。因为灵敏系数 $|c_i|$ 的大小不同，所以各个不确定度分量相等，其相应的实验标准差 s_i 并不相等，有时还可能相差较大。

介于上述两种情况，对按等作用原则分配的标准不确定度分量，必须根据实际情况进行适当的调整。调整的原则是：

(1) 扩大难于实现测量过程的不确定度分量，降低其精度要求；

(2) 缩小易于实现测量过程的不确定度分量，提高其精度要求；

(3) 对其余的不确定度分量不予调整，保持其精度要求。

三、验算调整后的不确定度

不确定度分配调整以后，应按式(7-29)进行验算，若不满足式(7-29)，即按式(7-17)计算所得的合成标准不确定度 u_c 超出了给定的合成标准不确定度允许范围，则应选择可能缩小的不确定度分量再予缩小，进一步提高其精度要求。若按式(7-17)计算所得的合成标准不确定度 u_c 较小，可适当扩大难于实现测量过程的不确定度分量，进一步降低其精度要求。

按等作用原则分配合成标准不确定度时需注意，当有的不确定度分量已经确定而不能改变时(如受测量条件限制，必须采用某种仪器测量某一项目时)，应先从给定的合成标准不确定度中除掉，然后再对其余不确定度分量进行分配。

【例 7-3】 按公式 $W=I^2Rt$ 测量电能，要求 W 的相对合成标准不确定度 $u_{crel}\leqslant 1\%$，电流表最高准确度为 0.2 级，电阻和时间的测量使用具有较高准确度的仪器。试确定 I，R，t 的相对标准不确定度。

(1) 确定灵敏系数

由式(7-5)可知：I 的灵敏系数 $c_1=2$；R 的灵敏系数 $c_2=1$；t 的灵敏系数 $c_3=1$。

(2) 按等作用原则分配合成标准不确定度

u_{crel}只有三个不确定度分量，它们是 u_{Irel}，u_{Rrel}，u_{trel}。相应的相对标准差为 s_{Irel}，s_{Rrel}，u_{trel}。$n=3$。

由式(7-31)知

$$s_{Irel}=\frac{u_{crel}}{\sqrt{n}c_1}=\frac{1.0\%}{\sqrt{3}\times 2}=0.288\ 6\%$$

$$s_{Rrel}=\frac{u_{crel}}{\sqrt{n}c_2}=\frac{1.0\%}{\sqrt{3}\times 1}=0.577\ 3\%$$

$$s_{trel}=\frac{u_{crel}}{\sqrt{n}c_3}=\frac{1.0\%}{\sqrt{3}\times 1}=0.577\ 3\%$$

由于测量电流时只有 0.2 级表，根据引用误差的定义，测量电流的相对不确定度实际值为

$$s'_{Irel}=\frac{A\cdot\alpha\%}{I}$$

式中：A——电流表的量程；

α——电流表的级；

I——实测电流值。

根据选择电工仪表的 2/3 原则，应有

$$I\geqslant\frac{2}{3}A$$

取 $I\geqslant\frac{2}{3}A$ 代入 s'_{Irel}式中，

$$s'_{Irel}=\frac{A\cdot\alpha\%}{\frac{2}{3}A}=\frac{3}{2}\times 0.2\%=0.3\%$$

$$s_{Irel}=0.288\ 6\%<0.3\%=s'_{Irel}$$

因此，0.2 级电表不能满足 s_{Irel}的要求，需进行调整。而测电阻和时间的仪器具有较高准确度，能满足所分配的不确定度。

现根据实际情况，调整分配结果，因测量电流只能达到 0.3%，所以将其看成为已知项。于是

$$u'_{Irel}=|c_1|s'_{Irel}=2\times 0.3\%=0.6\%$$

由于，

$$u_{crel}=\sqrt{u'^2_{Irel}+u^2_{Rrel}+u^2_{trel}}$$

则

$$u^2_{crel}=u'^2_{Irel}+u^2_{Rrel}+u^2_{trel}$$

由等作用原则

$$\sqrt{u_{crel}^2-u_{Irel}'^2}=\sqrt{u_{Rrel}^2+u_{trel}^2}=\sqrt{2u_{trel}^2}=\sqrt{2}u_{trel}$$

于是

$$u_{trel}=\frac{\sqrt{u_{crel}^2-u_{Irel}'^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(1\%)^2-(0.6\%)^2}}{\sqrt{2}}=0.56\%$$

所以
$$s_{Rrel}'=\frac{u_{tre}}{|c_2|}=0.56\%,\ s_{trel}'=\frac{u_{trel}}{c_3|}=0.56\%$$

由于电阻、时间的测量不确定度容易达到，故取 $s_{Rrel}'=0.56\%$，$s_{trel}'=0.56\%$。验算：

$$u_{crel}'=\sqrt{u_{Irel}'^2+u_{Rrel}'^2+u_{trel}'^2}=\sqrt{(0.6\%)^2+(0.56\%)^2+(0.56\%)^2}=0.99\%$$

$$u_{crel}=1\%>0.99\%=u_{crel}'$$

即这种分配结果满足式(7-29)。所以相对合成标准不确定度的分配结果 $s_{Irel}'=0.6\%$，$s_{Rrel}'=0.56\%$，$s_{trel}'=0.56\%$是合理的。

第三节　最佳测量方案的确定

在间接测量中，测量结果往往与多个因素有关，测量的途径往往有多条，而且测量的方案也往往有多个。如何选择最好的测量途径，确定最佳的测量方案，这就是本节所要讨论的问题。若间接测量的函数关系为

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

由式(7-14)可知间接测量的合成标准不确定度

$$\begin{aligned}u_c&=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}s_1\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}s_2\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}s_n\right)^2}\\&=\sqrt{(c_1s_1)^2+(c_2s_2)^2+\cdots+(c_ns_n)^2}\\&=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}\end{aligned}$$

式中：　　u_i——各不确定度分量；

$s_i(i=1,2,\cdots,n)$——各直接测量量的实验标准差；

$c_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$——各不确定度分量的灵敏系数。

显然，最佳的测量方案应使 u_c 达到最小。而要做到这一点，可从如下两个方面来考虑。

一、最佳测量函数公式的选择

一般说来在间接测量的函数公式中，不确定度分量的项数愈少，即直接测量量的数目愈少，合成标准不确定度就会愈小。因而在间接测量中，如果可由不同的函数公式来表示间接测量量则应选取直接测量量的数目最

少的函数公式。若不同的函数公式包含的直接测量量的数目相同，则应选择不确定度较小的直接测量量的函数公式。比如测量零件几何尺寸，在相同条件下测量内尺寸的不确定度较测量外尺寸的不确定度大，应尽量选择包含测量外尺寸的函数公式。

【例 7-4】 测量某箱体零件的轴心距 L（见图 7-4），试选择最佳测量方案。

根据图 7-4 所示，测量轴心距 L 有下列三种方法：

(1) 测量两轴直径 d_1、d_2 和外尺寸 L_1，其函数式为

$$L=L_1-\frac{d_1}{2}-\frac{d_2}{2}$$

(2) 测量两轴直径 d_1、d_2 和内尺寸 L_2，其函数式为

$$L=L_2+\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}$$

(3) 测量外尺寸 L_1 和内尺寸 L_2，其函数式为

$$L=\frac{L_1}{2}+\frac{L_2}{2}$$

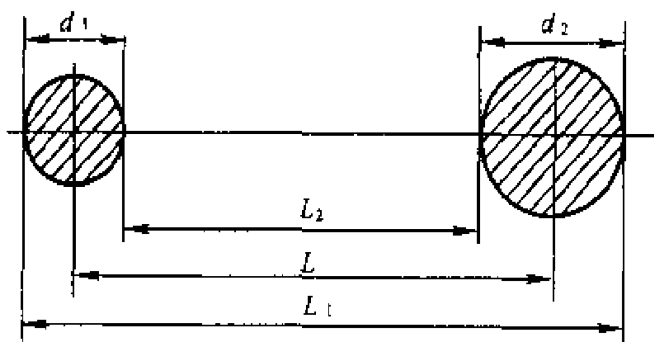


图 7-4

若已知测量的实验标准差分别为

$$s_{d1}=5\mu\text{m},\ s_{d2}=7\mu\text{m}$$

$$s_{L1}=8\mu\text{m},\ s_{L2}=10\mu\text{m}$$

由式(7-14)可知上述三种方法的合成标准不确定度分别为

第一种方法

$$u_{c1}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}s_{L1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial d_1}s_{d1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial d_2}s_{d2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{s_{L1}^2+\left(\frac{1}{2}s_{d1}\right)^2+\left(\frac{1}{2}s_{d2}\right)^2}=\sqrt{8^2+2.5^2+3.5^2}\mu\text{m}$$

$$=9.1\mu\text{m}$$

第二种方法

$$u_{c2}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}s_{L2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial d_1}s_{d1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial d_2}s_{d2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{s_{L2}^2+\left(\frac{1}{2}s_{d1}\right)^2+\left(\frac{1}{2}s_{d2}\right)^2}=\sqrt{10^2+2.5^2+3.5^2}\mu\text{m}$$

$$=10.9\mu\text{m}$$

第三种方法

$$u_{c3}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}s_{L1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}s_{L2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}s_{L1}\right)^2+\left(\frac{1}{2}s_{L2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4^2+5^2}\mu\text{m}=6.4\mu\text{m}$$

由计算结果可知，第三种方法的合成标准不确定度 u_{c3} 最小，而第二种方法的合成标准不确定度 u_{c2} 最大。这是因为第三种方法的函数公式最简单，而第二种方法的函数公式包含的直接测量量的数目较多，且又含有内尺寸测量的缘故。

二、灵敏系数最小选择

由式(7-14)可知间接测量的合成标准不确定度

$$u_c=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}s_1\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}s_2\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}s_n\right)^2}$$

$$=\sqrt{(c_1s_1)^2+(c_2s_2)^2+\cdots+(c_ns_n)^2}$$

$$=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$$

式中：$u_i(i=1,2,\cdots,n)$——各不确定度分量；

$c_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$——各不确定度分量的灵敏系数。

显然，若不确定度分量的灵敏系数 $c_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0$，则相应的不确定度分量$u_i=0$，表明该不确定度分量 u_i 对间接测量的合成标准不确定度 u_c 没有影响；若不确定度分量的灵敏系数 $c_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$为最小，则可减小相应的不确定度分量 u_i 对间接测量的合成标准不确定度 u_c 的贡献。

由此可知，选择灵敏系数等于零或为最小，给我们指出了在测量实践中达到最佳测量方案的趋向。

【例 7-5】 用弓高弦长法测量直径 D，见图 7-1。已知其函数关系式为

$$D=\frac{l^2}{4h}+h$$

试确定最佳测量方案。

由式(7-14)，求得测量直径的合成标准不确定度 u_c 为

$$u_c=\sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial h}\right)^2 s_1^2+\left(\frac{\partial D}{\partial l}\right)^2 s_2^2}=\sqrt{\left(\frac{l^2}{4h^2}-1\right)^2 s_1^2+\left(\frac{l}{2h}\right)^2 s_2^2}$$

要使测量直径的合成标准不确定度 u_c 为最小，必须

(1) 使灵敏系数 $\frac{l}{2h}=0$ 或为最小

满足 $\frac{l}{2h}=0$，必须 $l=0$，但由图中几何关系可知，此时有 $h=0$。因而无实际意义。若满足 $\frac{l}{2h}$ 为最小，则 $2h$ 值愈大愈好，即 l 值愈接近直径愈好。

(2) 使灵敏系数 $\frac{l^2}{4h^2}-1=0$

满足 $\frac{l^2}{4h^2}-1=0$，则必有 $l=2h$，即要求测量直径。

由上述分析可知，要使测量直径的合成标准不确定度 u_c 为最小，必须测量直径。此时关于弓高 h 的不确定度分量 u_h 已不影响直径的测量，而只有关于弦长 l 的不确定度分量 u_l 影响直径的测量。但对于大直径测量，此条件难以满足。不过它指出了当弓高 h 愈接近弦长 l 的 1/2 时，直径测量的合成标准不确定度 u_c 愈小，即测量精度愈高。

习题七

7-1 为求长方体的体积，直接测量其各边长为 $a=18.5\text{mm}$，$b=32.5\text{mm}$，$c=22.3\text{mm}$。若它们的系统误差分别为 $\Delta a=0.9\text{mm}$，$\Delta b=1.1\text{mm}$，$\Delta c=0.6\text{mm}$，试求其体积 V 及其系统误差(假定各边长测量间无关)。

7-2 测量某电路的电流 $I=22.5\text{mA}$，电压 $U=12.6\text{V}$，I 和 U 的标准差分别为 $s_I=0.5\text{mA}$，$s_U=0.1\text{V}$，试求所耗功率 $P=UI$ 及合成其标准不确定度(设 I 和 U 互不相关)。

7-3 长方体的边长分别为 a_1，a_2，a_3，测量时：

(1) 实验标准差均为 s；

(2) 实验标准差分别为 s_1，s_2，s_3。

试分别求两种情况下体积的合成标准不确定度。

7-4 已知间接测量的函数关系为 $y=x_1\cdot x_2^{-\frac{1}{2}}\cdot x_3^{-\frac{3}{2}}$，$x_1$，$x_2$，$x_3$ 的相对不确定度分别为：$u_{crel1}=2.0\%$，$\nu_1=8$；$u_{crel2}=1.5\%$，$\nu_2=6$；$u_{crel3}=1.0\%$，$\nu_3=10$；x_1，x_2，x_3 互不相关。试计算 y 的扩展不确定度。

7-5 三块量块研合在一起，若已知第一块量块与第二块量块的标准不确定度均为 $0.5\mu\text{m}$，第三块量块的标准不确定度为 $0.6\mu\text{m}$，试求组合尺寸的合成标准不确定度。

7-6 对 x 与 y 进行 20 组测量，所得数据如下：

x_i	10.32	10.38	10.38	10.42	10.28	10.30	10.28	10.34	10.37	10.31
y_i	2.51	2.59	2.54	2.64	2.49	2.58	2.63	2.53	2.58	2.52
x_i	10.29	10.30	10.10	10.33	10.41	10.29	10.39	10.37	10.35	10.39
y_i	2.18	2.58	2.62	2.52	2.65	2.48	2.52	2.58	2.57	2.60

试计算 x 与 y 的相关系数 ρ_{xy}。

7-7　已知 x 的标准不确定度为 u_x，y 的标准不确定度为 u_y，它们的和 $z=x+y$ 的合成标准不确定度为 u_c，试求 x 与 y 的相关系数 ρ_{xy}。

7-8　已知 x 与 y 的相关系数 $\rho_{xy}=-1$，令 $z=x+ay$，若 x 与 y 的标准不确定度分别为 u_x、u_y，试确定函数 z 的合成标准不确定度 u_c。

7-9　通过电流表的电流 I 与指针旋转角 φ 服从下列关系

$$I=c\cdot\tan\varphi$$

式中，c 为决定仪表结构的常数，$c=5.03\times10^{-7}A$。今两次测得 $\varphi_1=6°11'\pm1'$，$\varphi_2=43°32'\pm1'$。试求此两种情况下的 I_1 及 I_2 的值及其合成标准不确定度 u_c。

7-10　假定从支点到重心的长度为 L 的单摆振动周期为 T，重力加速度可由公式 $T=2\pi\sqrt{L/g}$ 中给出。若要求测量 g 的合成相对标准不确定度 $u_{crel}(g)\leqslant0.1\%$，试问按等作用原则分配不确定度时，

(1) $u_{crel}(g)$ 的两个分量即 $u_{Lrel}(g)$ 与 $u_{Trel}(g)$ 分别为多少？

(2) L 和 T 的相对标准差是多少？

第8章
线性参数的最小二乘法处理



最小二乘法是法国数学家勒让德于1805年首先提出的，而后德国数学家高斯于1809年推证了误差的概率定律，又完整地发展了这一方法。应用最小二乘法原理对实验和测量数据进行处理时，所得到的测量结果的残余误差平方和为最小，即在满足$\sum v_i^2$为最小的条件下来求解，这个方法称为最小二乘法，所得结果通常称为最佳值或最可信赖值。

"最小二乘法"作为数据处理和误差计算的一种数学手段被广泛地应用于工程实际和实验技术中。例如，在几何量、无线电等计量测试中，为提高其精度而常常采用组合测量方法，要求解t个未知量，而拟定的函数组合关系的个数n总是大于t，我们要从带有测量误差的n个直接测量的方程中，解出t个未知量，这是解一般代数方程的方法所无法胜任的，而需要利用最小二乘法来求出其最佳解。在实践中还常常遇到实验曲线的拟合问题、经验公式即回归方程的确定，以及为消弱实验误差对拟合曲线以及回归方程精确性的影响，也需要用最小二乘法求其最佳解。总之，在科学领域中，最小二乘法得到了广泛的应用。

对"最小二乘法"的学习，将会十分有助于我们如何在大量实验资料和数据面前尽快地解出最佳估计值及其不确定度。此外，"最小二乘法"还将为进一步学习方差分析、曲线拟合、变量筛选、多元回归、数字滤波以及数理统计等方面的理论打下基础。

第一节 最小二乘法原理

一、测量方程与残余误差方程

为了确定t个不可直接测量的未知量X_1，X_2，…，X_t的估计量x_1，

x_2, …, x_t. 对与这 t 个未知量有函数关系的直接测量量 Y 进行 n 次测量，即

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= f_1(X_1, X_2, \cdots, X_t) \\ Y_2 &= f_2(X_1, X_2, \cdots, X_t) \\ &\vdots \\ Y_n &= f_n(X_1, X_2, \cdots, X_t) \end{aligned}\right\} \tag{8-1}$$

(8-1)式称为理论方程式。为了提高测量的精度，减小随机误差对测量结果的影响，充分利用随机误差的抵偿性，一般要求 $n>t$，即理论方程的个数大于未知量的个数。

若以 y_1, y_2, …, y_n 作为直接测量量 Y_1, Y_2, …, Y_n 的估计量，则相应的测量方程式为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_t) \end{aligned}\right\} \tag{8-2}$$

介于测量方程式的个数大于未知量的个数，因而不能由式(8-2)直接求出未知量 X_1, X_2, …, X_t 的估计量 x_1, x_2, …, x_t。在这种情况下，如何由测量数据 l_1, l_2, …, l_n 获得最可信赖的结果？这一问题只能由“最小二乘法”予以解决。

显然，测量数据 l_1, l_2, …, l_n 的残余误差应为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - y_1 \\ v_2 &= l_2 - y_2 \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - y_n \end{aligned}\right\} \tag{8-3}$$

即

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - f_1(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ v_2 &= l_2 - f_2(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - f_n(x_1, x_2, \cdots, x_t) \end{aligned}\right\} \tag{8-4}$$

式(8-4)称为残余误差方程式，也可称为误差方程式(简称为残差方程式)。

二、最小二乘法原理

若测量数据 l_1, l_2, …, l_n 的测量误差是无偏的(即排除了测量的系统误差)，相互独立的，且服从正态分布，即

$$\delta_i = l_i - L_{0i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

无偏、相互独立，且

$$\delta_i \sim N(0, \sigma_i^2) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

式中：σ_i——测量误差 δ_i 的标准误差；

L_{0i}——直接测量量 Y_i 的真值。

那么，各测量数据 l_1，l_2，…，l_n 出现于相应真值附近 $d\delta_1$，$d\delta_2$，…，$d\delta_n$ 区域内的概率分别为

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{\delta_1^2}{2\sigma_1^2}} d\delta_1 \\ P_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{\delta_2^2}{2\sigma_2^2}} d\delta_2 \\ &\vdots \\ P_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{\delta_n^2}{2\sigma_n^2}} d\delta_n \end{aligned}\right\}$$

则依概率的乘法定理可知，各测量数据 l_1，l_2，…，l_n 同时出现于相应真值附近 $d\delta_1$，$d\delta_2$，…，$d\delta_n$ 区域内的概率应为

$$\begin{aligned} P &= P_1 P_2 \cdots P_n \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{\delta_2^2}{\sigma_2^2}+\cdots+\frac{\delta_n^2}{\sigma_n^2}\right)} d\delta_1 d\delta_2 \cdots d\delta_n \end{aligned}$$

根据概率论的极大似然原理，由于测量值 l_1，l_2，…，l_n 事实上已经同时出现，故有理由认为这 n 个测量值同时出现于相应区间 $d\delta_1$，$d\delta_2$，…，$d\delta_n$ 内的概率 P 应取得最大值。而欲使 P 取得最大值，则应有

$$\frac{\delta_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\delta_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{\delta_n^2}{\sigma_n^2} = \min \qquad (8\text{-}5)$$

由于真值的不可知性，导致各 $\delta_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 的不可知，因此式(8-5)应以残余误差的形式给出，即

$$\frac{v_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{v_n^2}{\sigma_n^2} = \min \qquad (8\text{-}6)$$

引入权号，由 $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} (i=1, 2, \cdots, n)$ 及式(8-6)可得

$$w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \cdots + w_n v_n^2 = \min \qquad (8\text{-}7)$$

在等精度测量中，有

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_n$$

则式(8-7)转化为

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \min \qquad (8\text{-}8)$$

由式(8-7)和式(8-8)可知，测量结果的最可信赖值应在残余误差平方

和(在不等精度测量中应为加权残余误差平方和)为最小的条件下求出，这就是最小二乘法原理。

事实上，按最小二乘条件给出最终结果充分地利用了随机误差的抵偿作用，可以有效地减小随机误差的影响，因而所得结果具有最可信赖性。

虽然，上述最小二乘法原理是在测量误差是无偏、相互独立、且服从正态分布的条件下导出的，但最小二乘法原理并不仅适用于这些条件，在不严格服从正态分布的情况下也常被使用。

一般地，最小二乘法可以用于线性参数的处理，也可以用于非线性参数的处理。由于测量的实际问题中大量的是线性参数，而非线性参数常借助于级数展开的方法在某一区域内近似地转化为线性形式。因此，线性参数的最小二乘法处理是最小二乘法理论所研究的基本内容。

一般地，线性函数的数学模型为

$$Y = f(X, a)$$

那么，线性函数的测量方程为

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1t}X_t \\ Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2t}X_t \\ &\vdots \\ Y_n &= a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nt}X_t \end{aligned}\right\} \tag{8-9}$$

其相应的估计量为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t \end{aligned}\right\} \tag{8-10}$$

相应的残余误差方程为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - y_1 = l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t) \\ v_2 &= l_2 - y_2 = l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t) \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - y_n = l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t) \end{aligned}\right\} \tag{8-11}$$

线性参数的最小二乘法处理借助于矩阵这一工具讨论将有许多方便之处。下面给出最小二乘法原理的矩阵形式。

设列向量

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

和 $n\times t$ 阶矩阵($n>t$)

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t}\\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nt}\end{pmatrix}$$

式中各矩阵元素为

v_1，v_2，…，v_n——n 个测量数据的残余误差；

x_1，x_2，…，x_t——t 个待求量的估计量；

l_1，l_2，…，l_n——n 个测量数据；

a_{11}，a_{12}，…a_{nt}，——n 个残余误差方程的 $n\times t$ 个系数。

则线性参数的残余误差方程式(8-11)可表示为

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t}\\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_t\end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} \tag{8-12}$$

等精度测量时，残余误差平方和最小这一条件的矩阵形式为

$$(v_1\quad v_2\quad \cdots\quad v_n)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\min$$

即

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\min \tag{8-13}$$

或

$$(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})=\min \tag{8-14}$$

而不等精度测量时，最小二乘法原理的矩阵形式为

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}=\min \tag{8-15}$$

或

$$(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})=\min \tag{8-16}$$

式中的 $\boldsymbol{W}$ 为 $n\times n$ 阶权矩阵。

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}$$

式中，$w_1=\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2}$，$w_2=\frac{\sigma^2}{\sigma_2^2}$，…，$w_n=\frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}$分别为测量数据$l_1$，$l_2$，…，$l_n$的权；$\sigma^2$为单位权方差；$\sigma_1^2$，$\sigma_2^2$，…，$\sigma_n^2$分别为测量数据$l_1$，$l_2$，…，$l_n$的方差。

线性参数不等精度测量的残余误差方程还可以转化为等精度形式，从而可以按等精度测量的最小二乘法来处理。

若不等精度测量数据l_1，l_2，…，l_n的权分别为w_1，w_2，…，w_n，将不等精度测量的残余误差方程式(8-11)两端同乘以相应的权的平方根，使其单位权化，得

$$\left.\begin{aligned} v_1\sqrt{w_1} &= l_1\sqrt{w_1}-(a_{11}\sqrt{w_1}x_1+a_{12}\sqrt{w_1}x_2+\cdots+a_{1t}\sqrt{w_1}x_t) \\ v_2\sqrt{w_2} &= l_2\sqrt{w_2}-(a_{21}\sqrt{w_2}x_1+a_{22}\sqrt{w_2}x_2+\cdots+a_{2t}\sqrt{w_2}x_t) \\ &\vdots \\ v_n\sqrt{w_n} &= l_n\sqrt{w_n}-(a_{n1}\sqrt{w_n}x_1+a_{n2}\sqrt{w_n}x_2+\cdots+a_{nt}\sqrt{w_n}x_t) \end{aligned}\right\}$$

令

$$v_1'=v_1\sqrt{w_1},\ v_2'=v_2\sqrt{w_2},\ \cdots,\ v_n'=v_n\sqrt{w_n};$$

$$l_1'=l_1\sqrt{w_1},\ l_2'=l_2\sqrt{w_2},\ \cdots,\ l_n'=l_n\sqrt{w_n};$$

$$a_{11}'=a_{11}\sqrt{w_1},\ a_{12}'=a_{12}\sqrt{w_1},\ \cdots,\ a_{n1}'=a_{n1}\sqrt{w_n},\ \cdots,\ a_{nt}'=a_{nt}\sqrt{w_n}$$

于是，不等精度测量的残余误差方程转化为等精度测量的残余误差方程的形式

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= l_1'-(a_{11}'x_1+a_{12}'x_2+\cdots+a_{1t}'x_t) \\ v_2' &= l_2'-(a_{21}'x_1+a_{22}'x_2+\cdots+a_{2t}'x_t) \\ &\vdots \\ v_n' &= l_n'-(a_{n1}'x_1+a_{n2}'x_2+\cdots+a_{nt}'x_t) \end{aligned}\right\} \tag{8-17}$$

方程(8-17)各式已具有相同的权，与等精度测量的残余误差方程(8-11)形式一致，则可按等精度测量数据处理的方法来处理。

设有$n\times1$阶矩阵(列向量)

$$L'=\begin{bmatrix} l_1' \\ l_2' \\ \vdots \\ l_n' \end{bmatrix} \qquad V'=\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}$$

和 $n\times t$ 阶矩阵

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1t}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \cdots & a_{2t}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}' & a_{n2}' & \cdots & a_{nt}' \end{bmatrix}$$

于是，线性参数不等精度测量的残余误差方程的矩阵形式为

$$V'=L'-A'\hat{X} \tag{8-18}$$

此时，最小二乘法条件用矩阵形式可表示为

$$V'^{\mathrm{T}}V'=\min \tag{8-19}$$

或

$$(L'-A'\hat{X})^{\mathrm{T}}(L'-A'\hat{X})=\min \tag{8-20}$$

第二节　正规方程

为了获得更可靠的结果，测量次数 n 总要多于未知参数的个数 t，即所得残余误差方程的个数总要多于未知参数的个数，故直接用一般解代数方程的方法是无法解得这些未知参数的。而按最小二乘法条件则可以将残余误差方程转化为有确定解的代数方程组(其方程的个数正好等于未知参数的个数)，从而可求解出这些未知参数。这个有确定解的代数方程组称为最小二乘法的正规方程(或称为法方程)。

线性参数的最小二乘法处理的程序可以归纳为：①根据具体的测量问题列出残余误差方程；②按最小二乘法原理，用求极值的方法将残余误差方程转化为正规方程；③用解线性方程组的方法求解正规方程，得到待求参数的估计量；④给出不确定度估计。

对于非线性参数，可借助于级数展开的方法在某一区域内近似地将其线性化，然后按线性参数的最小二乘法处理的程序去处理。显然，建立正规方程是待求参数最小二乘法处理的基本环节。

一、等精度测量线性参数最小二乘法处理的正规方程

线性参数的残余误差方程为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t) \\ v_2 &= l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t) \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t) \end{aligned}\right\} \tag{8-21}$$

在等精度测量中，最小二乘法原理为式(8-8)，即

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \min$$

现在讨论如何才能满足这一条件。

为求上式的估计量 x_1，x_2，…，x_t，可采用多元函数求极值的方法来满足式(8-8)。

为此，将残余误差的平方和分别对 x_1，x_2，…，x_t 求偏导数，并令其等于零。为简化表达式，不妨令

$$Z = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x_1} =& -2a_{11}[l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t)] - \\ & 2a_{21}[l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t)] - \\ & 2a_{n1}[l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t)] \\ =& -2\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}x_t\right)\right] \\ =& \ 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x_2} =& -2\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}x_t\right)\right] \\ =& \ 0 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x_t} =& -2\left[\sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}^2 x_t\right)\right] \\ =& \ 0 \end{aligned}$$

上列各式的二阶偏导数恒正，即

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} = 2\sum_{1}^{n} a_{i1}^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} = 2\sum_{1}^{n} a_{i2}^2 > 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_t^2} = 2\sum_{1}^{n} a_{it}^2 > 0$$

由此可知，残余误差的平方和 $Z = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$ 的极小值存在。而由一阶偏导数等于零所构成的线性方程组为

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}^2 x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i
\end{aligned}\right\} \tag{8-22}$$

线性方程组(8-22)称为等精度测量线性参数最小二乘法处理的正规方程。这是一个 t 元线性方程组，在其系数行列式不等于零时，有惟一确定的解。这一确定的解满足最小二乘法原理式(8-8)。因而，这一确定的解是未知参数的最佳估计量。

线性方程组(8-22)在形式上有如下特征：

①沿方程组主对角线上分布的平方项的系数 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 (j=1, 2, \cdots, t)$ 都是正数；

②以主对角线为轴对称分布的项的系数相等，如 $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}$。

现将等精度测量线性参数最小二乘法处理的正规方程式(8-22)转化为矩阵形式：

将正规方程组的第 r 个方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{it}x_t = \sum_{i=1}^{n} a_{ir}l_i$$

变化为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_{ir}l_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{it}x_t\right) \\
&= (a_{1r}l_1 + a_{2r}l_2 + \cdots + a_{nr}l_n) - (a_{1r}a_{11}x_1 + a_{2r}a_{21}x_1 + \cdots + a_{nr}a_{n1}x_1) - \\
&\quad (a_{1r}a_{12}x_2 + a_{2r}a_{22}x_2 + \cdots + a_{nr}a_{n2}x_2) - \cdots - (a_{1r}a_{1t}x_t + a_{2r}a_{2t}x_t + \cdots + \\
&\quad a_{nr}a_{nt}x_t) \\
&= a_{1r}[l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t)] + a_{2r}[l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + \\
&\quad a_{2t}x_t)] + \cdots + a_{nr}[l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t)]
\end{aligned}$$

$$= a_{1r}v_1 + a_{2r}v_2 + \cdots + a_{nr}v_n = 0$$

其中 $r=1, 2, \cdots, t$。

由此，正规方程组可写为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n &= 0 \\ a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1t}v_1 + a_{2t}v_2 + \cdots + a_{nt}v_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8-23}$$

于是，有如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \tag{8-24}$$

这就是等精度测量线性参数最小二乘法处理的正规方程式的矩阵形式。由于

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

所以正规方程又可表示为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{0}$$

即

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{8-25}$$

若令

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$$

则正规方程又可表示为

$$\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{8-26}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 t，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是满秩的，且其行列式 $|\boldsymbol{C}| \neq 0$。那么，$\hat{\boldsymbol{X}}$ 必定有惟一解。此时用 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 左乘正规方程的两边，即可得正规方程解的表达式

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{8-27}$$

所得解 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 的数学期望为

$$E(\hat{\boldsymbol{X}}) = E(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}$$

式中，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{X}$ 均为列向量，$\boldsymbol{Y}$ 是 $n\times1$ 阶矩阵，$\boldsymbol{X}$ 是 $t\times1$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_t \end{pmatrix}$$

矩阵元素 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为直接测量量的真值，矩阵元素 $X_1, X_2, \cdots, X_t$ 为待求的间接测量量的真值。由此可见$\hat{X}$是 $\boldsymbol{X}$ 的无偏估计量。

【例 8-1】 在不同温度下测定铜棒的长度如表 8-1，试估计 0℃时的铜棒长度 y_0 和铜的线膨胀系数 α。

表 8-1

i	1	2	3	4	5	6
t_i/℃	10	20	25	30	40	45
l_i ℃	2 000.36	2 000.72	2 000.80	2 001.07	2 001.18	2 001.60

解：测量铜棒长度的数学模型是

$$y = y_0(1 + \alpha t)$$

由此列出测量方程

$$y_i = y_0(1 + \alpha t_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, 6)$$

可得残余误差方程

$$v_i = l_i - y_0(1 + \alpha t_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, 6)$$

式中：l_i —在温度 t_i 下铜棒长度的测量值；

α——铜的线膨胀系数。

令 $y_0 = a$，$\alpha y_0 = b$ 为待估计的两个参数，则残余误差方程可写为

$$v_i = l_i - (a + t_i b) \quad (i = 1, 2, \cdots, 6)$$

为了方便计算，将数据列表如表 8-2。

表 8-2

i	t_i/℃	t_i^2/℃^{2}	l_i/mm	$t_i l_i$/(℃·mm)
1	10	100	2 000.36	20 003.6
2	20	400	2 000.72	40 014.4
3	25	625	2 000.80	50 020.0
4	30	900	2 001.07	60 032.1
5	40	1 600	2 001.48	80 059.2
6	45	2 025	2 001.60	90 072.0
$\sum$	170	5 650	12 006.03	340 201.3

根据残余误差方程，按式(8-22)写出正规方程

$$\left.\begin{aligned} na + \sum_{i=1}^{6} t_i b &= \sum_{i=1}^{6} l_i \\ \sum_{i=1}^{6} t_i a + \sum_{i=1}^{6} t_i^2 b &= \sum_{i=1}^{6} t_i l_i \end{aligned}\right\}$$

将表中计算出的正规方程的系数和常数代入正规方程，则有

$$\left.\begin{aligned}6a+170b&=12\,006.03\\170a+5\,650b&=340\,201.3\end{aligned}\right\}$$

解之得

$$a=1\,999.97\text{mm}$$

$$b=0.036\,54\text{mm}/℃$$

即

$$y_0=1\,999.97\text{mm}$$

$$\alpha=\frac{b}{y_0}=\frac{0.036\,54}{1\,999.97}=0.000\,018\,3/℃$$

若按矩阵形式计算，则有

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}n & \sum_{i=1}^{6}t_i\\ \sum_{i=1}^{6}t_i & \sum_{i=1}^{6}t_i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 170\\170 & 5\,650\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1.13 & -0.034\\-0.034 & 0.001\,2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{6}l_i\\ \sum_{i=1}^{6}t_il_i\end{pmatrix}$$

于是可得

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.13 & -0.034\\-0.034 & 0.001\,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\,006.03\\340\,201.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,999.97\\0.036\,54\end{pmatrix}$$

所以

$$a=1\,999.97\text{mm}$$

$$b=0.036\,54\text{mm}/℃$$

即

$$y_0=1\,999.97\text{mm}$$

$$\alpha=\frac{b}{y_0}=\frac{0.036\,54}{1\,999.97}=0.000\,018\,3/℃$$

因此，铜棒长度 y 随温度 t 的线性变化的规律为

$$y=1\,999.97\times(1+0.000\,018\,3t/℃)\text{mm}$$

二、不等精度测量线性参数最小二乘法处理的正规方程

不等精度测量时线性参数的残余误差方程仍然是式(8-11)，不同之处在于进行不等精度测量线性参数最小二乘法处理时，要取加权残余误差平方和为最小，即

$$w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \cdots + w_n v_n^2 = \min$$

为简化表达式，不妨令

$$Z = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i^2 = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \cdots + w_n v_n^2$$

将加权残余误差的平方和 Z 分别对 x_1，x_2，…，x_t 求偏导数，并令其等于零，即

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial Z}{\partial x_t} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

上列各式的二阶偏导数恒正，即

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} &= 2\sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1}^2 > 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} &= 2\sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2}^2 > 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x_t^2} &= 2\sum_{i=1}^{n} w_i a_{it}^2 > 0 \end{aligned}$$

由此可知，加权残余误差的平方和 $Z = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i^2 = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \cdots + w_n v_n^2$ 的极小值存在。而由一阶偏导数等于零所构成的线性方程组为

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} l_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2}^2 x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} l_i \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} a_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it}^2 x_t &= \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} l_i \end{aligned}\right\} \tag{8-28}$$

线性方程组(8-28)称为不等精度测量线性参数最小二乘法处理的正规方程。这是一个 t 元线性方程组，在其系数行列式不等于零时，有惟一确定的解。这一确定的解满足最小二乘法原理式(8-7)，是未知参数的最佳估计量。

线性方程组(8-28)在形式上有如下特征：

① 沿方程组主对角线上分布的项的系数 $\sum_{i=1}^{n} w_i a_{ij}^2 (j=1, 2, \cdots, t)$ 都是正数；

② 以主对角线为轴对称分布的项的系数相等，如 $\sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{i2} = \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{i1}$。

若不等精度测量数据 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 的权分别为 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，将不等精度测量的正规方程式(8-28)单位权化，即令

$$\begin{aligned} a'_{ir} &= \sqrt{w_i} a_{ir} \\ l'_i &= \sqrt{w_i} l_i \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots, n \\ r=1, 2, \cdots, t \end{pmatrix}$$

于是，不等精度测量的正规方程式(8-28)转化为

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}'^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n} a'_{i1} a'_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a'_{i1} a'_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} a'_{i1} l'_i \\ \sum_{i=1}^{n} a'_{i2} a'_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}'^2 x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a'_{i2} a'_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} a'_{i2} l'_i \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a'_{it} a'_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} a'_{it} a'_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}'^2 x_t &= \sum_{i=1}^{n} a'_{it} l'_i \end{aligned}\right\} \tag{8-29}$$

显然，正规方程式(8-29)在形式上与等精度测量的正规方程式(8-22)完全一样。把不等精度测量的正规方程(8-28)各式分别展开，整理后可得与式(8-23)类似的结果

$$\left.\begin{aligned} w_1 a_{11} v_1 + w_2 a_{21} v_2 + \cdots + w_n a_{n1} v_n &= 0 \\ w_1 a_{12} v_1 + w_2 a_{22} v_2 + \cdots + w_n a_{n2} v_n &= 0 \\ &\vdots \\ w_1 a_{1t} v_1 + w_2 a_{2t} v_2 + \cdots + w_n a_{nt} v_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

于是，有如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W} \boldsymbol{V} = 0 \tag{8-30}$$

这就是不等精度测量线性参数最小二乘法处理的正规方程式的矩阵形式。

由于

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

所以式(8-30)又可表示为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})=0$$

即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{L} \tag{8-31}$$

该方程式(8-31)的解，即不等精度测量线性参数的最小二乘法处理为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{L} \tag{8-32}$$

若令

$$\boldsymbol{C}^{*}=\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}$$

则

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{L} \tag{8-33}$$

所得解$\hat{\boldsymbol{X}}$的数学期望为

$$\begin{aligned}E(\hat{\boldsymbol{X}})&=E(\boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{L})=\boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}E(\boldsymbol{L})=\boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}\\&=\boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

由此可见$\hat{\boldsymbol{X}}$是$\boldsymbol{X}$的无偏估计量。

【例 8-2】 已知测量方程

$$\left.\begin{aligned}y_1&=x_1+x_2\\y_2&=2x_1+x_2\\y_3&=x_1+2x_2\\y_4&=2x_1+2x_2\end{aligned}\right\}$$

对$y_i(i=1,2,3,4)$的测量数据及其相应的标准差分别为

$$\begin{aligned}l_1&=3.538 &\quad s_1&=0.003\\l_2&=6.055 &\quad s_2&=0.003\\l_3&=4.547 &\quad s_3&=0.002\\l_4&=7.070 &\quad s_4&=0.002\end{aligned}$$

试求x_1，x_2的最小二乘法处理的正规方程的解。

解： 首先给出测量的残余误差方程

$$\left.\begin{aligned}v_1&=l_1-(x_1+x_2)\\v_2&=l_2-(2x_1+x_2)\\v_3&=l_3-(x_1+2x_2)\\v_4&=l_4-(2x_1+2x_2)\end{aligned}\right\}$$

然后确定各式的权

$$w_1 : w_2 : w_3 : w_4 = \frac{1}{s_1^2} : \frac{1}{s_2^2} : \frac{1}{s_3^2} : \frac{1}{s_4^2}$$

$$= \frac{1}{0.003^2} : \frac{1}{0.003^2} : \frac{1}{0.002^2} : \frac{1}{0.002^2} = 4 : 4 : 9 : 9$$

取 $w_1 = 4$，$w_2 = 4$，$w_3 = 9$，$w_4 = 9$。

将残余误差方程的系数、测量数据及其相应的权记入表 8-3 中。

表 8-3

i	a_{i1}	a_{i2}	l_i	w_i	$w_i a_{i1}^2$	$w_i a_{i1} a_{i2}$	$w_i a_{i2}^2$	$w_i a_{i1} l_i$	$w_i a_{i2} l_i$
1	1	1	3.538	4	4	4	4	14.152	14.152
2	2	1	6.055	4	16	8	4	48.440	24.220
3	1	2	4.547	9	9	18	36	40.923	81.846
4	2	2	7.070	9	36	36	36	127.260	127.260
$\sum$					65	66	80	230.775	247.478

将计算结果代入正规方程

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{i2} x_2 &= \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} l_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2}^2 x_2 &= \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} l_i \end{aligned}\right\}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} 65x_1 + 66x_2 &= 230.775 \\ 66x_1 + 80x_2 &= 247.478 \end{aligned}\right\}$$

解之，得不等精度测量最小二乘法处理结果

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2.522 \\ x_2 &= 1.013 \end{aligned}\right\}$$

三、非线性参数最小二乘法处理的正规方程

一般情况下，若测量方程

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_t)$$

为非线性函数，则测量的残余误差方程

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - y_1 = l_1 - f_1(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ v_2 &= l_2 - y_2 = l_2 - f_2(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - y_n = l_n - f_n(x_1, x_2, \cdots, x_t) \end{aligned}\right\} \tag{8-34}$$

是非线性方程组。在非线性参数最小二乘法处理中，直接由式(8-34)建立正规方程并求解是十分困难的。

解决这类问题，一般采取线性化的方法，将非线性函数转化为线性函数，再按线性参数最小二乘法处理的方法进行处理。

为此，取 x_{10}，x_{20}，…，x_{t0} 为待估计量 x_1，x_2，…，x_t 的近似值，于是估计量 x_1，x_2，…，x_t 则可表示为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + \delta_1 \\ x_2 &= x_{20} + \delta_2 \\ &\vdots \\ x_t &= x_{t0} + \delta_t \end{aligned}\right\} \tag{8-35}$$

式中：δ_1，δ_2，…，δ_t——估计量与所取近似值的偏差。

因此，只须求得偏差 δ_1，δ_2，…，δ_t，即可由式(8-35)获得估计量 x_1，x_2，…，x_t。

现将非线性函数在 x_{10}，x_{20}，…，x_{t0} 处展开，取一次项，则有

$$\begin{aligned} f_i &= f(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ &= f_i(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{t0}) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \delta_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \delta_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_t}\right)_0 \delta_t \\ &\qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{8-36}$$

式中：$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_r}\right)_0$——函数 f_i 对 x_r 的偏导数在 x_{10}，x_{20}，…，x_{t0} 处的值，$r=1$，2，…，t。

将展开式(8-36)代入残余误差方程(8-34)，并令

$$l'_i = l_i - f_i(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{t0})$$

$$a_{i1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0, \ a_{i2} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0, \ \cdots, \ a_{it} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_t}\right)_0$$

则残余误差方程(8-34)转化为线性方程组

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l'_1 - (a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2 + \cdots + a_{1t}\delta_t) \\ v_2 &= l'_2 - (a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + \cdots + a_{2t}\delta_t) \\ &\vdots \\ v_n &= l'_n - (a_{n1}\delta_1 + a_{n2}\delta_2 + \cdots + a_{nt}\delta_t) \end{aligned}\right\} \tag{8-37}$$

于是，就可以按线性参数的情形列出正规方程并解出 $\delta_r(r=1, 2, \cdots, t)$，进而按式(8-35)求得相应的估计量 $x_r(r=1, 2, \cdots, t)$。

当然，为获得线性化的结果，函数的展开式只取一次项而舍去了二次以上的高次项，严格地讲，由此给出的估计量是近似的。不过，这样的结果已能满足实际的要求了，因为只要所取近似值 x_{r0} 的偏差 δ_r 相对于所研究的问题而言足够小，则二次以上的高次项的值甚微，可以忽略不计。因此，在对某一非线性参数作线性化处理时，估计量近似值的选取应有相应的精度

要求。

要将函数展开，必须先确定未知数的近似值，其方法可以是：

(1) 直接测量

对未知量 $x_r(r=1, 2, \cdots, t)$ 进行直接测量，所得结果可作为其近似值。

(2) 通过部分方程式进行计算

从残余误差方程中选取最简单的 t 个方程，采用近似的求解方法，如令 $v_i=0$，于是可以得到一个 t 元齐次线性方程组，并由此解得 $x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{t0}$，即为未知数的近似值。至于采用哪种方法，应视具体情况而定。

根据以上讨论可知，各种情况(等精度与不等精度，线性与非线性)下的最小二乘法处理，最后都可归结为等精度线性参数的最小二乘法处理。

四、最小二乘原理与算术平均值原理的关系

为了确定一个未知量 X 的估计量 x，对其进行 n 次直接测量，可得 n 个测量数据

$$l_1, l_2, \cdots, l_n$$

其相应的权分别为

$$w_1, w_2, \cdots, w_n$$

则测量的残余误差方程为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - x \\ v_2 &= l_2 - x \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - x \end{aligned}\right\} \tag{8-38}$$

其最小二乘法处理的正规方程为

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1}^2 x = \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} l_i \tag{8-39}$$

由残余误差方程(8-38)可知 $a_{i1}=1(i=1, 2, \cdots, n)$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x = \sum_{i=1}^{n} w_i l_i$$

于是可得最小二乘法处理的结果

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_1 l_1 + w_2 l_2 + \cdots + w_n l_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} \tag{8-40}$$

式(8-40)正好与不等精度测量的加权算术平均值原理一致。

对于等精度测量，由于

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_n = w$$

则等精度测量最小二乘法处理的结果为

$$x = \frac{w_1 l_1 + w_2 l_2 + \cdots + w_n l_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{w(l_1 + l_2 + \cdots + l_n)}{nw} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \tag{8-41}$$

式(8-41)正好与等精度测量的算术平均值原理一致。

由此可见，最小二乘法原理与算术平均值原理是一致的，算术平均值原理可看成最小二乘法原理的特例。

第三节　不确定度评定

对测量数据的最小二乘法处理的最终结果，不仅要给出未知参数的最可信赖的估计量，而且还要确定其可信赖的程度，即还须对所得到的估计量进行不确定度评定。

一、测量数据的不确定度评定

为了评定最小二乘估计量 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 的不确定度，首先必须对直接测量所得的测量数据 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 进行不确定度估计。一般地，测量数据的不确定度应以标准差 σ 来表示，但由于标准差 σ 的真值无法求得，因而只能以有限次的直接测量所得到的测量数据 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 的实验标准差 s 作为标准差 σ 的估计值。故测量数据的不确定度评定，实质上就是求出测量数据 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 的实验标准差 s。

1. 等精度测量数据的不确定度评定

设对包含 t 个未知量的 n 个线性参数方程组(8-9)进行 n 次独立的等精度测量，得到了 n 个测量数据 $l_1, l_2, \cdots, l_n$。其相应的测量误差分别为 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$，显然 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 是相互独立的随机误差。由于一般情况下真误差 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 是不可知的，我们只能由残余误差 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 给出实验方差 s^2 来估计方差 σ^2。

可以证明，随机变量 $\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{\sigma^2}$ 服从自由度为 $(n-t)$ 的 χ^2 分布，即 $\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{\sigma^2} \sim$

$\chi^2(n-t)$。

根据 χ^2 分布的性质，有

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{\sigma^2}\right] = n-t \tag{8-42}$$

由此可得

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}\right] = \frac{n-t}{n}\sigma^2$$

显然，若取方差 σ^2 的估计量实验方差

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}$$

则实验方差 s^2 不是方差 σ^2 的无偏估计量。

由于

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n} \cdot \frac{n}{n-t}\right] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t}\right] = \sigma^2$$

故取方差 σ^2 的估计量实验方差

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t} \tag{8-43}$$

则由式(8-43)给出的实验方差 s^2 是方差 σ^2 的无偏估计量。

由式(8-43)可得测量数据的实验标准差

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t}} \tag{8-44}$$

【例 8-3】 设有如下等精度测量残余误差方程

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 10.08 - (x_1 + x_2) \\ v_2 &= 10.12 - (x_1 + x_3) \\ v_3 &= 10.02 - (x_2 + x_3) \\ v_4 &= 15.18 - (x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}\right\}$$

试求测量数据的实验标准差。

解：由所给残余误差方程得等精度测量最小二乘法处理的正规方程应为

$$
\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{2} x_{1}+\sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{i2} x_{2}+\sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{i3} x_{3} &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} l_{i} \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i2} a_{i1} x_{1}+\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{2} x_{2}+\sum_{i=1}^{n} a_{i2} a_{i3} x_{3} &= \sum_{i=1}^{n} a_{i2} l_{i} \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i3} a_{i1} x_{1}+\sum_{i=1}^{n} a_{i3} a_{i2} x_{2}+\sum_{i=1}^{n} a_{i3}^{2} x_{3} &= \sum_{i=1}^{n} a_{i3} l_{i}
\end{aligned}\right\}
$$

为计算正规方程的系数和常数项，将残余误差方程的系数和测量数据填入表 8-4 内，并进行计算。正规方程的系数和常数项为相应列各数的总和。

表 8-4

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	l_i	$a_{i1}a_{i1}$	$a_{i1}a_{i2}$	$a_{i1}a_{i3}$	$a_{i2}a_{i2}$	$a_{i2}a_{i3}$	$a_{i3}a_{i3}$	$a_{i1}l_i$	$a_{i2}l_i$	$a_{i3}l_i$
1	1	1	0	10.08	1	1	0	1	0	0	10.08	10.08	0
2	1	0	1	10.12	1	0	1	0	0	1	10.12	0	10.02
3	0	1	1	10.02	0	0	0	1	1	1	0	10.02	10.02
4	1	1	1	15.18	1	1	1	1	1	1	15.18	15.18	15.18
Σ					3	2	2	3	2	3	35.38	35.28	35.32

将所得正规方程的系数和常数项代人正规方程，则可得

$$
\left.\begin{aligned}
3x_1+2x_2+2x_3 &= 35.38 \\
2x_1+3x_2+2x_3 &= 35.28 \\
2x_1+2x_2+3x_3 &= 35.32
\end{aligned}\right\}
$$

解之，得估计量 $x_1=5.10$，$x_2=5.00$，$x_3=5.04$。

将它们代人残余误差方程，于是可得残余误差

$$v_1=-0.02,\ v_2=-0.02,\ v_3=-0.02,\ v_4=0.04$$

那么，残余误差平方和

$$\sum_{i=1}^{4} v_i^2 = 28\times10^{-4}$$

将残余误差平方和代入式(8-44)，则

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t}}=\sqrt{\frac{28\times10^{-4}}{4-3}}=0.053$$

2. 不等精度测量数据的不确定度评定

不等精度测量数据的不确定度评定与等精度测量数据的不确定度评定相似，只是将式(8-43)中的残余误差平方和变成加权残余误差平方和，则测量数据的单位权方差的无偏估计为单位权实验方差

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i v_i^2}{n-t} \tag{8-45}$$

故测量数据的实验单位权标准差为

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i v_i^2}{n-t}} \tag{8-46}$$

二、最小二乘估计量的不确定度评定

最小二乘估计法所确定的估计量 x_1，x_2，…，x_t 的精度取决于测量数据的精度和线性方程组所决定的函数关系。对于给定的线性方程组，若已知测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的实验标准差 s，即可进行最小二乘估计量的不确定度评定。

下面首先讨论等精度测量时最小二乘估计量的不确定度评定。

设有正规方程

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}^2 x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i
\end{aligned}\right\}$$

现要给出由此方程所确定的估计量 x_1，x_2，…，x_t 的不确定度评定。为此，利用不定乘数法求出 x_1，x_2，…，x_t 的表达式，然后再找出估计量 x_1，x_2，…，x_t 的标准差与测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的标准差之间的关系，则可得到估计量不确定度评定的表达式。

设有不定乘数 d_{11}，d_{12}，…，d_{1t}；d_{21}，d_{22}，…，d_{2t}；…；d_{t1}，d_{t2}，…，d_{tt}（共 $t\times t$ 个），为求 x_1，以不定乘数 d_{11}，d_{12}，…，d_{1t}分别去乘正规方程的第 1，2，…，t 式，则

$$\left.\begin{aligned}
d_{11}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 x_1 + d_{11}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + d_{11}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}x_t &= d_{11}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i \\
d_{12}\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}x_1 + d_{12}\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 x_2 + \cdots + d_{12}\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}x_t &= d_{12}\sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i \\
&\vdots \\
d_{1t}\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}x_1 + d_{1t}\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}x_2 + \cdots + d_{1t}\sum_{i=1}^{n} a_{it}^2 x_t &= d_{1t}\sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i
\end{aligned}\right\}$$

将上述方程组各式的左右两边分别相加得

$$\sum_{r=1}^{t} d_{1r} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{ir} x_1 + \sum_{r=1}^{t} d_{1r} \sum_{i=1}^{n} a_{i2} a_{ir} x_2 + \cdots + \sum_{r=1}^{t} d_{1r} \sum_{i=1}^{n} a_{it} a_{ir} x_t$$

$$= \sum_{r=1}^{t} d_{1r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} l_i$$

选择不定乘数 d_{11}，d_{12}，…，d_{1t}的值，使之满足 x_1 的系数为 1，而其余各 $x_i(i=2, 3, \cdots, t)$的系数为 0，即

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r=1}^{t} d_{1r} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{ir} &= 1 \\ \sum_{r=1}^{t} d_{1r} \sum_{i=1}^{n} a_{i2} a_{ir} &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{r=1}^{t} d_{1r} \sum_{i=1}^{n} a_{it} a_{ir} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

则

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{r=1}^{t} d_{1r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} l_i \\ &= d_{11} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} l_i + d_{12} \sum_{i=1}^{n} a_{i2} l_i + \cdots + d_{1t} \sum_{i=1}^{n} a_{it} l_i \\ &= (d_{11} a_{11} + d_{12} a_{12} + \cdots + d_{1t} a_{1t}) l_1 + (d_{11} a_{21} + d_{12} a_{22} + \cdots + d_{1t} a_{2t}) l_2 + \\ &\quad \cdots + (d_{11} a_{n1} + d_{12} a_{n2} + \cdots + d_{1t} a_{nt}) l_n \end{aligned}$$

由于 l_1，l_2，…，l_n 是相互独立的随机变量，而且测量是等精度的，于是

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_n = s$$

且，灵敏系数 $c_i = \dfrac{\partial x_1}{\partial l_i} = (d_{11} a_{i1} + d_{12} a_{i2} + \cdots + d_{1t} a_{it})$　　$(i=1, 2, \cdots, n)$

于是

$$\begin{aligned} s_{x1}^2 &= c_1^2 s_1^2 + c_2^2 s_2^2 + \cdots + c_n^2 s_n^2 \\ &= (d_{11} a_{11} + d_{12} a_{12} + \cdots + d_{1t} a_{1t})^2 s_1^2 + (d_{11} a_{21} + d_{12} a_{22} + \cdots + d_{1t} a_{2t})^2 s_2^2 + \\ &\quad \cdots + (d_{11} a_{n1} + d_{12} a_{n2} + \cdots + d_{1t} a_{nt})^2 s_n^2 \\ &= [(d_{11} a_{11} + d_{12} a_{12} + \cdots + d_{1t} a_{1t})^2 + (d_{11} a_{21} + d_{12} a_{22} + \cdots + d_{1t} a_{2t})^2 + \\ &\quad \cdots + (d_{11} a_{n1} + d_{12} a_{n2} + \cdots + d_{1t} a_{nt})^2] s^2 \end{aligned}$$

将等式右端 s^2 的系数展开，并适当地合并同类项，充分注意到不定乘数 d_{11}，d_{12}，…，d_{1t}的选择条件，则

$$s_{x1}^2 = d_{11} s^2$$

同理可得

$$s_{x2}^2 = d_{22}s^2$$
$$s_{x3}^2 = d_{33}s^2$$
$$\vdots$$
$$s_{xt}^2 = d_{tt}s^2$$

综上所述，可得如下关于不定乘数的结果：

$$\left.\begin{aligned} d_{11}\sum_1^n a_{i1}^2 + d_{12}\sum_1^n a_{i1}a_{i2} + \cdots + d_{1t}\sum_1^n a_{i1}a_{it} &= 1 \\ d_{11}\sum_1^n a_{i2}a_{i1} + d_{12}\sum_1^n a_{i2}^2 + \cdots + d_{1t}\sum_1^n a_{i2}a_{it} &= 0 \\ &\vdots \\ d_{11}\sum_1^n a_{it}a_{i1} + d_{12}\sum_1^n a_{it}a_{i2} + \cdots + d_{1t}\sum_1^n a_{it}^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad ①$$

$$\left.\begin{aligned} d_{21}\sum_1^n a_{i1}^2 + d_{22}\sum_1^n a_{i1}a_{i2} + \cdots + d_{2t}\sum_1^n a_{i1}a_{it} &= 0 \\ d_{21}\sum_1^n a_{i2}a_{i1} + d_{22}\sum_1^n a_{i2}^2 + \cdots + d_{2t}\sum_1^n a_{i2}a_{it} &= 1 \\ &\vdots \\ d_{21}\sum_1^n a_{it}a_{i1} + d_{22}\sum_1^n a_{it}a_{i2} + \cdots + d_{2t}\sum_1^n a_{it}^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad ②$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} d_{t1}\sum_1^n a_{i1}^2 + d_{t2}\sum_1^n a_{i1}a_{i2} + \cdots + d_{tt}\sum_1^n a_{i1}a_{it} &= 0 \\ d_{t1}\sum_1^n a_{i2}a_{i1} + d_{t2}\sum_1^n a_{i2}^2 + \cdots + d_{tt}\sum_1^n a_{i2}a_{it} &= 0 \\ &\vdots \\ d_{t1}\sum_1^n a_{it}a_{i1} + d_{t2}\sum_1^n a_{it}a_{i2} + \cdots + d_{tt}\sum_1^n a_{it}^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (t)$$

上列关于不定乘数 $d_{rs}(r, s=1, 2, \cdots, t)$的线性方程组的系数与正规方程的系数完全相同。在解出不定乘数 $d_{rs}(r, s=1, 2, \cdots, t)$时，可利用解正规方程的中间结果，极为简便。

事实上，我们只需从方程组①中解出不定乘数 d_{11}，从方程组②中解出不定乘数 d_{12}，…，从方程组 (t)中解出不定乘数 d_{tt}，即可估计出各估计量 x_1，x_2，…，x_t 的实验方差为

$$s_{x1}^2 = d_{11}s^2$$

$$s_{x2}^2 = d_{22}s^2$$

$$\vdots$$

$$s_{xt}^2 = d_{tt}s^2$$

于是其相应的实验标准差为

$$s_{x1} = \sqrt{d_{11}}\ s$$

$$s_{x2} = \sqrt{d_{22}}\ s$$

$$\vdots$$

$$s_{xt} = \sqrt{d_{tt}}\ s$$

式中：s——测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的实验标准差。

对于不等精度测量，与等精度测量的情况类似。若有正规方程

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} l_i \\
\sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2}^2 x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} l_i \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} a_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it}^2 x_t &= \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} l_i
\end{aligned}\right\}$$

求解如下 t 个方程组

$$\left.\begin{aligned}
d_{11} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1}^2 x + d_{12} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{i2} + \cdots + d_{1t} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{it} &= 1 \\
d_{11} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{i1} + d_{12} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2}^2 + \cdots + d_{1t} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{it} &= 0 \\
&\vdots \\
d_{11} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} a_{i1} + d_{12} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} a_{i2} + \cdots + d_{1t} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it}^2 &= 0
\end{aligned}\right\} ①$$

$$\left.\begin{aligned}
d_{21} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1}^2 x + d_{22} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{i2} + \cdots + d_{2t} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i1} a_{it} &= 0 \\
d_{21} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{i1} + d_{22} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2}^2 + \cdots + d_{2t} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{i2} a_{it} &= 1 \\
&\vdots \\
d_{21} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} a_{i1} + d_{22} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it} a_{i2} + \cdots + d_{2t} \sum_{i=1}^{n} w_i a_{it}^2 &= 0
\end{aligned}\right\} ②$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{l}
d_{t1}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{i1}^2 x + d_{t2}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{i1}a_{i2} + \cdots + d_{tt}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{i1}a_{it} = 0 \\
d_{t1}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{i2}a_{i1} + d_{t2}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{i2}^2 + \cdots + d_{tt}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{i2}a_{it} = 0 \\
\vdots \\
d_{t1}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{it}a_{i1} + d_{t2}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{it}a_{i2} + \cdots + d_{tt}\sum_{i=1}^{n}w_i a_{it}^2 = 1
\end{array}\right\} \quad ⑦$$

得到 d_{11}，d_{12}，…，d_{tt}，于是估计量 x_1，x_2，…，x_t 的实验标准差为

$$s_{x1} = \sqrt{d_{11}}\,s$$

$$s_{x2} = \sqrt{d_{22}}\,s$$

$$\vdots$$

$$s_{xt} = \sqrt{d_{tt}}\,s$$

式中：s——不等精度测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的单位权实验标准差。

利用矩阵形式可以更方便地获得上述结果。设有协方差矩阵($n\times n$ 阶矩阵)

$$DL = \begin{pmatrix} Dl_{11} & Dl_{12} & \cdots & Dl_{1n} \\ Dl_{21} & Dl_{22} & \cdots & Dl_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Dl_{n1} & Dl_{n2} & \cdots & Dl_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= E(L - EL)(L - EL)^{\mathrm{T}}$$

式中：Dl_{ii}——l_i 的方差，$Dl_{ii} = E(l_i - El_i)(l_i - El_i) = \sigma_i^2$　($i=1$，2，…，n)；

Dl_{ij}——l_i 与 l_j 的协方差(或称相关矩)　(i，$j=1$，2，…，n　$i\neq j$)；

$Dl_{ij} = E(l_i - El_i)(l_j - El_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$　(i，$j=1$，2，…，n　$i\neq j$)。

若有等精度独立测量数据 l_1，l_2，…，l_n，则

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_n = s$$

且相关系数 $\rho_{ij}=0$ 即 $Dl_{ij}=0$，则有

$$DL = \begin{pmatrix} s^2 & & & 0 \\ & s^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^2 \end{pmatrix}$$

于是估计量的协方差为

$$D\hat{X} = E(\hat{X} - E\hat{X})(\hat{X} - E\hat{X})^{\mathrm{T}}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{L}-E\boldsymbol{L})(\boldsymbol{L}-E\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\\
&= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\\
&= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}s^2A(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\\
&= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}s^2
\end{aligned}
$$

矩阵

$$
(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1t} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{t1} & d_{t2} & \cdots & d_{tt} \end{pmatrix}
$$

中的各元素为不定乘数，可由矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 求逆而得，也可用解方程组①，②，…，ⓣ的方法获得

同理，也可得不等精度测量的协方差矩阵

$$
D\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A})^{-1}s^2
$$

式中：s——不等精度测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的单位权实验标准差。

矩阵

$$
(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1t} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{t1} & d_{t2} & \cdots & d_{tt} \end{pmatrix}
$$

中的各元素为不定乘数，可由矩阵$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A})$求逆而得，也可用解方程组①，②，…，ⓣ的方法获得。

【例 8-4】 已知等精度测量数据的实验标准差为 $s=0.04$，测量数据最小二乘法处理的正规方程为

$$
\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &= 17.40 \\ 2x_1 + x_2 &= 6.32 \end{aligned}\right\}
$$

试给出最小二乘法估计 x_1 与 x_2 的实验标准差。

解：设不定乘数 d_{11}，d_{12}，由所给正规方程得出关于不定乘数 d_{11}，d_{12} 的方程组

$$
\left.\begin{aligned} 6d_{11} + 2d_{12} &= 1 \\ 2d_{11} + d_{12} &= 0 \end{aligned}\right\}
$$

解得 $d_{11}=0.5$。

又设不定乘数 d_{11}，d_{12}，由所给正规方程得出关于不定乘数 d_{11}，d_{12}的方程组

$$
\left.\begin{aligned} 6d_{21} + 2d_{22} &= 0 \\ 2d_{21} + d_{22} &= 1 \end{aligned}\right\}
$$

解得 $d_{22}=3$。

于是，最小二乘法估计 x_1 与 x_2 的实验标准差

$$s_{x1}=\sqrt{d_{11}}s=\sqrt{0.5}\times 0.04=0.03$$

$$s_{x2}=\sqrt{d_{22}}s=\sqrt{3}\times 0.04=0.07$$

第四节　组合测量数据的最小二乘法处理

在精密测试工作中，组合测量占有十分重要的地位。例如，作为标准量的多面棱体、仪表度盘、电容器、砝码以及其他标准器的检定等，为了减小随机效应对测量的影响，提高测量准确度，可采用组合测量的方法。

组合测量是通过直接测量待测参数的估计量(一般采用等精度测量)，然后对这些数据进行处理，从而求得待测参数的估计量，并给出其不确定度。一般地，组合测量数据用最小二乘法进行处理，这是最小二乘法在精密测量中的一种重要应用。

现以检定三段刻线间距为例，说明组合测量的数据处理方法。

如图 8-1 所示，要求检定 A，B，C，D 间的距离 x_1，x_2，x_3。

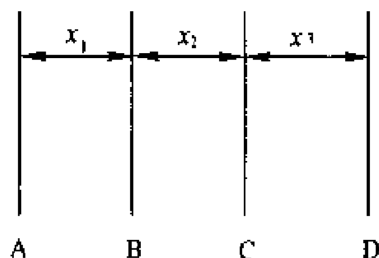


图 8-1

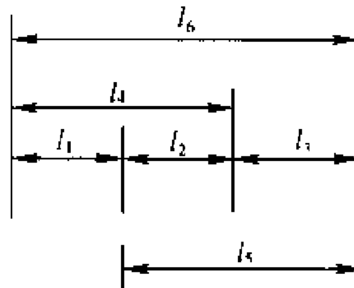


图 8-2

为此，直接测量刻线间距的各种组合量(见图 8-2)，得到如下测量数据：

$$l_1=1.015\text{mm}\qquad l_2=0.985\text{mm}\qquad l_3=1.020\text{mm}$$

$$l_4=2.016\text{mm}\qquad l_5=1.981\text{mm}\qquad l_6=3.032\text{mm}$$

按式(8-11)列出残差方程

$$\left.\begin{aligned}v_1&=l_1-x_1\\v_2&=l_2-x_2\\v_3&=l_3-x_3\\v_4&=l_4-(x_1+x_2)\\v_5&=l_5-(x_2+x_3)\\v_6&=l_6-(x_1+x_2+x_3)\end{aligned}\right\}$$

则正规方程为

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{i2} x_2 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{i3} x_3 &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} l_i \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i2} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 x_2 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} a_{i3} x_3 &= \sum_{i=1}^{n} a_{i2} l_i \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i3} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i3} a_{i2} x_2 + \sum_{i=1}^{n} a_{i3}^2 x_3 &= \sum_{i=1}^{n} a_{i3} l_i
\end{aligned}\right\}$$

将残余误差方程的系数和测量数据填入表 8-5 内，并进行计算。

表 8-5

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	l_i	a_{i1}^2	$a_{i1}a_{i2}$	$a_{i1}a_{i3}$	$a_{i1}l_i$	a_{i2}^2	$a_{i2}a_{i3}$	$a_{i2}l_i$	a_{i3}^2	$a_{i3}l_i$
1	1	0	0	1.015	1	0	0	1.015	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0.985	0	0	0	0	1	0	0.985	0	0
3	0	0	1	1.020	0	0	0	0	0	0	0	1	1.020
4	1	1	0	2.016	1	1	0	2.016	1	0	2.016	0	0
5	0	1	1	1.981	0	0	0	0	1	1	1.981	1	1.981
6	1	1	1	3.032	1	1	1	3.032	1	1	3.032	1	3.032
$\sum$					3	2	1	6.063	4	2	8.014	3	6.033

将表 8-5 中正规方程的系数与常数代入得

$$\left.\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6.063 \\
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8.014 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6.033
\end{aligned}\right\}$$

解正规方程得

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= 1.028\text{mm} \\
x_2 &= 0.983\text{mm} \\
x_3 &= 1.013\text{mm}
\end{aligned}\right\}$$

这就是刻线间距 AB，BC，CD 的最佳估计量。

接下来先求测量数据的实验标准差，计算残余误差

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= l_1 - x_1 = 1.015\text{mm} - 1.028\text{mm} = -0.013\text{mm} \\
v_2 &= l_2 - x_2 = 0.985\text{mm} - 0.983\text{mm} = 0.002\text{mm} \\
v_3 &= l_3 - x_3 = 1.020\text{mm} - 1.013\text{mm} = 0.007\text{mm} \\
v_4 &= l_4 - (x_1 + x_2) = 2.016\text{mm} - (1.028\text{mm} + 0.983\text{mm}) = 0.005\text{mm} \\
v_3 &= l_5 - (x_2 + x_3) = 1.981\text{mm} - (0.983\text{mm} + 1.013\text{mm}) = -0.015\text{mm} \\
v_3 &= l_6 - (x_1 + x_2 + x_3) \\
&= 3.032\text{mm} - (1.028\text{mm} + 0.983\text{mm} + 1.013\text{mm}) = 0.008\text{mm}
\end{aligned}\right\}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2$$

$$= (0.013^2 + 0.002^2 + 0.007^2 + 0.005^2 + 0.015^2 + 0.008^2)\text{mm}^2$$

$$= 0.000\ 536\text{mm}^2$$

由于测量是等精度的，因而各测量数据具有相同的实验标准差

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t}} = \sqrt{\frac{0.000\ 536}{6-3}}\text{mm} = 0.013\text{mm}$$

再求估计量 x_1，x_2，x_3 的实验标准差，设不定乘数

$$\left.\begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{matrix}\right\}$$

由正规方程得关于不定乘数的方程组

$$\left.\begin{aligned} 3d_{11} + 2d_{12} + d_{13} &= 1 \\ 2d_{11} + 4d_{12} + 2d_{13} &= 0 \\ d_{11} + 2d_{12} + 3d_{13} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{解 } d_{11}$$

$$\left.\begin{aligned} 3d_{21} + 2d_{22} + d_{23} &= 0 \\ 2d_{21} + 4d_{22} + 2d_{23} &= 1 \\ d_{21} + 2d_{22} + 3d_{23} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{解 } d_{22}$$

$$\left.\begin{aligned} 3d_{31} + 2d_{32} + d_{33} &= 0 \\ 2d_{31} + 4d_{32} + 2d_{33} &= 0 \\ d_{31} + 2d_{32} + 3d_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{解 } d_{33}$$

解得

$$d_{11} = 0.5,\ d_{22} = 0.5,\ d_{33} = 0.5$$

所以估计量 x_1，x_2，x_3 的标准不确定度

$$u(x_1) = s_{x1} = s\sqrt{d_{11}} = 0.013 \times \sqrt{0.5}\text{mm} = 0.009\text{mm}$$

$$u(x_2) = s_{x2} = s\sqrt{d_{22}} = 0.013 \times \sqrt{0.5}\text{mm} = 0.009\text{mm}$$

$$u(x_3) = s_{x3} = s\sqrt{d_{33}} = 0.013 \times \sqrt{0.5}\text{mm} = 0.009\text{mm}$$

习题八

8-1 用最小二乘法处理测量数据有何实际意义?

8-2 残余误差方程与测量方程有何联系与差别?

8-3 正规方程的系数与残余误差方程的系数有何关系?

8-4 正规方程的系数有何特征?

8-5 算术平均值原理和加权算术平均值原理与最小二乘法原理有何关系?

8-6 已知测量方程为

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 2.9 \\ x - 2y &= 0.9 \\ 2x - 3y &= 1.9 \end{aligned}\right\}$$

试求 x, y 的最小二乘估计及其不确定度评定。

8-7 测得电容 $C_1 = 2.15\mu F$, $C_2 = 1.008\mu F$ 及两电容的并联值 $C_1 + C_2 = 3.12\mu F$, 试求两电容 C_1, C_2 的最小二乘估计及其实验标准差。

8-8 已知测量的残余误差方程为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 16.6 - x_1 \\ v_2 &= 4.2 - x_2 \\ v_3 &= 21.2 - x_1 - x_2 \\ v_4 &= 24.4 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}\right\}$$

试用最小二乘法确定 x_1, x_2 的最佳估计量及其实验标准差。

8-9 已知测量方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \\ x - y &= 0.92 \\ z - x &= 1.00 \\ z - y &= 1.35 \end{aligned}\right\}$$

试求 x, y 的最小二乘估计及其不确定度。

8-10 已知测量方程为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \\ y_4 &= x_1 + x_2 \\ y_5 &= x_2 + x_3 \\ y_6 &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}\right\}$$

相应的测量数据为

$$l_1 \pm s_1 = 1.02 \pm 0.02$$

$$l_2 \pm s_2 = 0.98 \pm 0.04$$

$$l_3 \pm s_3 = 1.02 \pm 0.02$$

$$l_4 \pm s_4 = 2.02 \pm 0.01$$

$$l_5 \pm s_5 = 1.98 \pm 0.02$$

$$l_6 \pm s_6 = 3.04 \pm 0.01$$

试用最小二乘法确定 x_1，x_2，x_3 的最佳估计量及其实验标准差。

第9章 回归分析

第一节 基本概念

一、概述

前几章所讨论的内容，其目的在于寻求被测量的最佳估计值及其不确定度。在生产和科学实验中，还有另一类问题，即测量与数据处理的目的并不在于被测量的估计值，而是为了寻求两个变量或多个变量之间的内在关系，这就是本章所要解决的主要问题。

表达变量之间关系的方法有散点图、表格、曲线、数学表达式等，其中数学表达式能较客观地反映事物的内在规律性，形式紧凑，且便于从理论上作进一步分析研究，对认识自然界量与量之间关系有着重要意义。而数学表达式的获得是通过回归分析方法完成的。

在生产和科学实验中，人们常遇到各种变量。从辩证唯物主义观点来看，这些变量之间是相互联系、互相依存的，它们之间存在着一定的关系。人们通过实践，发现变量之间的关系可分为两种类型。

(1) 函数关系(即确定性关系)

数学分析和物理学中的大多数公式属于这种类型。如以速度 v 作匀速运动的物体，走过的距离 s 与时间 t 之间，有如下确定的函数关系：

$$s = vt$$

若上式中的变量有两个已知，则另一个就可借函数关系精确地求出。

(2) 相关关系

在实际问题中，绝大多数情况下，变量之间的关系不那么简单。例如，在车床上加工零件，零件的加工误差与零件的直径之间有一定的关系，知

道了零件直径可大致估计其加工误差，但又不能精确地预知加工误差。这是由于零件在加工过程中影响加工误差的因素很多，如毛坯的裕量、材料性能、切削深度、进给量，切削速度、零件长度等等，相互构成一个很复杂的关系，加工误差并不由零件直径这一因素所确定。像这种关系，在实践中是大量存在的，如：材料的抗拉强度与其硬度之间；螺纹零件中螺纹的作用中径与螺纹中径之间；齿轮各种综合误差与有关单项误差之间；某些光学仪器、电子仪器等开机后仪器的读数变化与时间之间；材料的性能与其化学成分之间等等。这些变量之间既存在着密切的关系，又不能由一个(或几个)变量(自变量)的数值精确地求出另一个变量(因变量)的数值，而是要通过试验和调查研究，才能确定它们之间的关系，我们称这类变量之间的关系为相关关系。一般讲，多考虑一些变量会减少所考察的因变量的不确定性，但不是绝对的。

应该指出，函数和相关虽然是两种不同类型的变量关系，但是它们之间并无严格的界限。一方面由于测量误差等原因，确定性的关系在实际中往往通过相关关系表现出来。例如尽管从理论上物体运动的速度、时间和运动距离之间存在着函数关系，但如果我们做多次反复地实测，每次测得的数值并不一定满足 $s=vt$ 的关系。在实践中，为确定某种函数关系中的常数，往往也是通过试验。另一方面，当对事物内部的规律性了解得更加深刻的时候，相关关系又能转化为确定性关系。事实上，实验科学(包括物理学)中的许多确定性的定理正是通过对大量实验数据的分析和处理，经过总结和提高，从感性到理性，最后才得到更能深刻地反映变量之间关系的客观规律。

二、回归分析的主要内容

回归分析是处理变量的相关关系的一种数理统计方法。上面已经提到，由于相关变量之间不存在确定性关系，因此，在生产实践和科学实验所记录的这些变量的数据中，存在着不同程度的差异。回归分析就是应用数学的方法，对大量的观测数据进行处理，从而得出比较符合事物内部规律的数学表达式。概括地说，本章主要解决以下几方面的问题：

①从一组数据出发，确定这些变量之间的数学表达式——回归方程或经验公式。

②对回归方程的可信程度进行统计检验。

③进行因素分析，例如对于共同影响一个变量的许多变量(因素)中，找出哪些是重要因素，哪些是次要因素。

回归分析是数理统计中的一个重要分支，在工农业生产和科学研究中

有着广泛的应用。今天，在实验数据处理、经验公式的求得、因素分析、仪器的精度分析、产品质量的控制、某些新标准的制定、气象及地震预报、自动控制中的数学模型的制定及其他许多场合中，回归分析往往是一种很有用的工具。

第二节　一元线性回归

一元回归是处理两个变量之间的关系，即两个变量 x 和 y 间若存在一定的关系，则通过实验，分析所得数据，找出两者之间关系的经验公式。假如两个变量之间的关系是线性的就称为一元线性回归，这就是工程上和科研中常遇到的直线拟合问题。

一、一元线性回归方程的求法

下面通过具体例子来讨论这个问题。

【例 9-1】 测量某导线在一定温度 x 下的电阻值 y，结果如表 9-1 所示。

表 9-1

x/℃	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	46.5	50.0
y/Ω	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.9	85.1

试找出它们之间的内在关系。

为了研究电阻 y 与温度 x 之间的关系，把数据点在坐标纸上，如图 9-1 所示。这种图叫散点图。从散点图可以看出，电阻 y 与温度 x 大致成线性关系。因此，我们假设 x 与 y 之间的内在关系是一条直线，这些点与直线

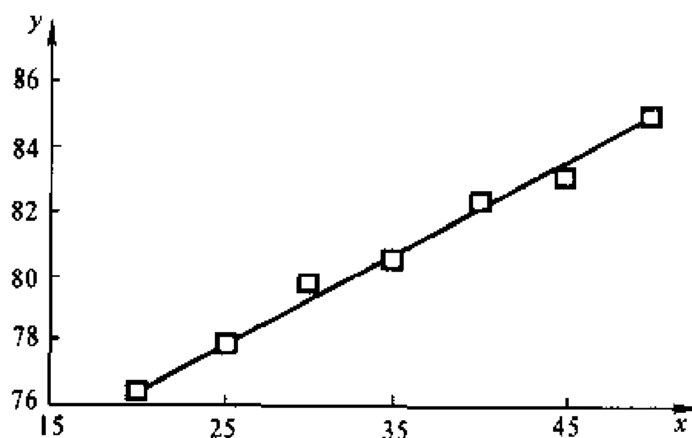


图 9-1

的偏离是试验过程中其他一些随机因素的影响而引起的。这样就可以假设这组测量数据有如下结构形式：

$$y_t = \beta_0 + \beta x_t + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \cdots, N) \tag{9-1}$$

式中的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N$ 分别表示其他随机因素对电阻 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 影响的总和，一般假设它们是一组相互独立、并服从同一正态分布 $N(0, \sigma)$ 的随机变量（本章对 ε_t，$t=1, 2, \cdots, N$，均作这样的假设）。变量 x 可以是随机变量，也可是一般变量，不特别指出时，都作一般变量处理，即它是可以精确测量或严格控制的变量。这样，变量 y 是服从 $N(\beta_0+\beta x_t, \sigma)$ 的随机变量。式(9-1)就是一元线性回归的数学模型。在例 9-1 中 $N = 7$。

我们用最小二乘法来估计式(9-1)中的参数 β_0、β。

设 b_0，b 分别是参数 β_0 和 β 的最小二乘估计，于是得到一元线性回归的回归方程

$$\hat{y} = b_0 + bx \tag{9-2}$$

式中，b_0，b 叫做回归方程的回归系数。对每一个 x_t，由方程(9-2)可以确定一个回归值 $\hat{y}_t = b_0 + bx_t$。实际测量值 y_t 与这个回归值 $\hat{y}_t$ 之差就是残余误差 v_t：

$$v_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - b_0 - bx_t \quad (t = 1, 2, \cdots, N) \tag{9-3}$$

应用最小二乘法求解回归系数，就是在使残余误差平方和为最小的条件下求解回归系数 b_0 和 b。这种方法我们在第 8 章中已经熟悉了。

误差方程组为

$$\begin{cases} v_1 = y_1 - \hat{y}_1 = y_1 - (b_0 + bx_1) \\ v_2 = y_2 - \hat{y}_2 = y_2 - (b_0 + bx_2) \\ \quad \vdots \\ v_N = y_N - \hat{y}_N = y_N - (b_0 + bx_N) \end{cases} \tag{9-4}$$

应使 $E = \sum_{t=1}^{N} v_t^2 = \sum_{t=1}^{N} (y_t - b_0 - bx_t)^2 =$ 最小，于是求取的回归系数 b_0，b 应满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial b_0} = -2\sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - bx_t) \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = -2\sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - bx_t)x_t \end{cases} \tag{9-5}$$

解该方程组可得

$$b = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \tag{9-6}$$

$$b_0 = \bar{y} - b\bar{x} \tag{9-7}$$

式中：

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y_t,\ \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_t$$

$$l_{xx} = \sum_{t=1}^{N}(x_t - \bar{x})^2 = \sum_{t=1}^{N} x_t^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2 \tag{9-8}$$

$$l_{xy} = \sum_{t=1}^{N}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) = \sum_{t=1}^{N} x_t y_t - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right) \tag{9-9}$$

将式(9-7)代入回归直线方程(9-2)，可得到回归直线的另一种形式

$$\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \tag{9-10}$$

由此可见，回归直线方程(9-2)通过点($\bar{x}$，$\bar{y}$)，明确这一点对回归直线的作图是有帮助的。

由式(9-6)，(9-7)求回归方程的具体计算通常是列表进行。例 9-1 的计算见表 9-2 和表 9-3，由此可得回归方程

$$\hat{y} = 70.90 + 0.282\,4x \tag{9-11}$$

表 9-2

序　号	x_t/℃	y_t/Ω	x_t^2/℃^{2}	y_t^2/Ω^2	$x_t y_t$/Ω℃
1	19.1	76.30	364.81	5 821.690	1 457.330
2	25.0	77.80	625.00	6 052.840	1 945.000
3	30.1	79.75	906.01	6 360.062	2 400.475
4	36.0	80.80	1 296.00	6 528.640	2 908.800
5	40.0	82.35	1 600.00	6 781.522	3 294.000
6	46.5	83.90	2 162.25	7 039.210	3 901.350
7	50.0	85.10	2 500.00	7 242.010	4 255.000
Σ	246.7	566.00	9 454.07	45 825.974	20 161.955

表 9-3

$\sum_{t=1}^{N} x_t = 246.7$	$\sum_{t=1}^{N} y_t = 566.00$	$N = 7$
$\bar{x} = 35.243$	$\bar{y} = 80.857$	$\sum_{t=1}^{N} x_t y_t = 20\,161.955$
$\sum_{t=1}^{N} x_t^2 = 9\,454.07$	$\sum_{t=1}^{N} y_t^2 = 45\,825.974$	$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right) = 19\,947.457$
$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2 = 8\,694.413$	$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right)^2 = 45\,765.143$	$l_{xy} = \sum_{t=1}^{N} x_t y_t -$
$l_{xx} = \sum_{t=1}^{N} x_t^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2$	$l_{yy} = \sum_{t=1}^{N} y_t^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right)^2$	$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right)$
$= 759.657$	$= 60.831$	$= 214.498$

续表

$b=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=0.2824$　　$b_0=\bar{y}-b\bar{x}=70.90$
$\hat{y}=70.90+0.2824x$

二、回归方程的方差分析与显著性检验

回归直线式(9-11)求出来了，但它是否有实际意义呢？这里有两个问题需要解决：其一，就这种求回归直线的方法本身而言，对任何两个变量 x 和 y 的一组数据(x_t, y_t)，$t=1, 2, \cdots, N$，都可以用最小二乘法该拟合一条直线。要知道这条直线是否基本符合 y 与 x 之间的客观规律，这就是回归方程的显著性检验要解决的问题。其二，由于 x 与 y 之间是相关关系，知道了 x 值，并不能精确地知道 y 值，那么，用回归方程，根据自变量 x 值预报(或控制)因变量 y 值，其效果如何？这就是回归直线的预报准确度问题。为此，必须对回归问题作进一步分析。现介绍一种常用的方法——方差分析方法，其实质是对 N 个观测值与其算术平均值之差的平方和进行分解，将 N 个观测值的影响因素从数量上区别开，然后用 F 检验法对所求回归方程进行显著性检验。

1. 回归问题的方差分析

观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 之间的差异(称变差)，是由两个方面原因引起的：①自变量 x 取值的不同；②其他因素(包括试验误差)的影响。为了对回归方程进行检验，首先必须把它们所引起的变差从 y 的变差中分解出来。N 个观测值之间的变差，可用观测值 y 与其算术平均值 $\bar{y}$ 的离差平方和来表示，称为总的离差平方和，记作

$$S=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2=l_{xx} \tag{9-12}$$

因为(见图 9-2)

$$S=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2=\sum_{t=1}^{N}[(y_t-\hat{y}_t)+(\hat{y}_t-\bar{y})]^2$$
$$=\sum_{t=1}^{N}(\hat{y}_t-\bar{y})^2+\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)^2+2\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)(\hat{y}_t-\bar{y})$$

可以证明，交叉项

$$\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)(\hat{y}_t-\bar{y})=0 \tag{9-13}$$

因此总的离差平方和可以分解为两个部分，即

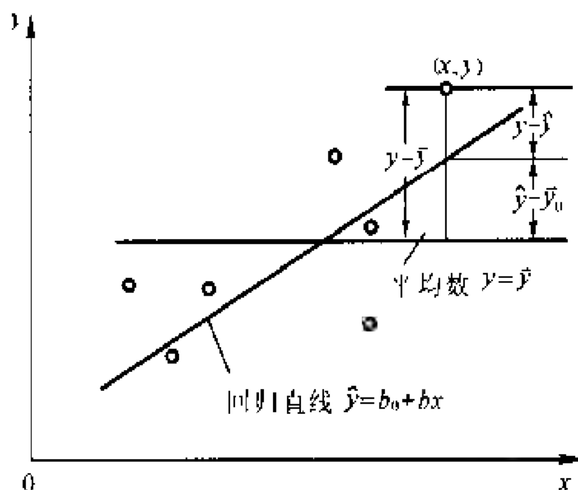


图 9-2

$$\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2=\sum_{t=1}^{N}(\hat{y}_t-\bar{y})^2+\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)^2 \tag{9-14}$$

或者写成

$$S=U+Q \tag{9-15}$$

以上两式中右边第一项，即

$$U=\sum_{t=1}^{N}(\hat{y}_t-\bar{y})^2 \tag{9-16}$$

称为回归平方和，它反映了在 y 总的变差中由于 x 和 y 的线性关系引起 y 变化的部分。因此回归平方和也就是考虑了 x 与 y 的线性关系部分在总的离差平方和 S 中所占的成分，以便在数量上与 Q 值相区分。式(9-14)、式(9-15)中右边第二项，即

$$Q=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)^2 \tag{9-17}$$

称为残余平方和，即所有观测点距回归直线的残余误差 $y_t-\hat{y}_t$ 的平方和。它是除了 x 对 y 的线性影响之外的一切因素(包括实验误差、x 对 y 的非线性影响以及其他未加控制的因素)对 y 的变差作用，这部分的变差是仅考虑 x 与 y 的线性关系所不能减少的部分。

这样，通过平方和分解式(9-14)就把对 N 个观测值的两种影响从数量上区分出来。U 和 Q 的具体计算通常并不是按它们的定义式(9-16)和式(9-17)进行，而是按下式计算：

$$U=\sum_{t=1}^{N}(\hat{y}_t-\bar{y})^2=\sum_{t=1}^{N}(b_0+bx_t-b_0-b\bar{x})^2$$

$$=b^2\sum_{t=1}^{N}(x_t-\bar{x})^2=b\sum_{t=1}^{N}(x_t-\bar{x})(\hat{y}_t-\bar{y})=bl_{xy} \tag{9-18}$$

$$Q=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)^2=S-U=l_{yy}-bl_{xy} \tag{9-19}$$

因此，在计算 S，U，Q 时就可以利用回归系数计算过程中的一些结果。

对每一个平方和都有一个称为"自由度"的数据跟它相联系。如果总的离差平方和是由 N 项组成，其自由度就是 $N-1$。如果一个平方和是由几部分相互独立的平方和组成，则总的自由度等于各部分自由度之和。正如总的离差平方和在数值上可以分解成回归平方和与残余平方和两部分一样，总的离差平方和的自由度 ν_S 也等于回归平方和的自由度 ν_U 与残余平方和 ν_Q 的自由度之和，即

$$\nu_S=\nu_U+\nu_Q \tag{9-20}$$

在回归问题中，$\nu_S=N-1$，而 ν_U 对应于自变量的个数，因此在一元线性回归问题中 $\nu_U=1$，故根据式(9-20)，Q 的自由度 $\nu_Q=N-2$。

2. 回归方程显著性检验

由回归平方和与残余平方和的意义可知，一个回归方程是否显著，也就是 y 与 x 的线性关系是否密切，取决于 U 及 Q 的大小，U 愈大 Q 愈小说明 y 与 x 的线性关系愈密切。回归方程显著性检验通常采用 F 检验法，因此要计算统计量 F

$$F=\frac{U/\nu_U}{Q/\nu_Q} \tag{9-21}$$

对一元线性回归

$$F=\frac{U/1}{Q/(N-2)} \tag{9-22}$$

再查 F 分布(见附表)。F 分布表中的两个自由度分别对应于式(9-21)中的 ν_U 和 ν_Q，对一元线性回归分别是 1 和 $N-2$，检验时，一般需查出 F 分布表中对三种不同显著性水平 α 的数值，设记为 $F_\alpha(1,N-2)$，将这三个数与式(9-22)计算的 F 值进行比较，若 $F\geqslant F_{0.01}(1,N-2)$，则认为回归高度显著(或称在 0.01 水平上显著)；若 $F_{0.05}(1,N-2)\leqslant F<F_{0.01}(1,N-2)$，则认为回归显著(或称在 0.05 水平上显著)；若 $F_{0.10}(1,N-2)\leqslant F<F_{0.05}(1,N-2)$，则认为回归在 0.1 水平上显著；若 $F<F_{0.10}(1,N-2)$，一般认为回归不显著，此时 y 对 x 的线性关系不密切。

3. 残余方差与残余标准差

残余平方和 Q 除以它的自由度 ν_Q 所得商

$$\sigma^2=\frac{Q}{N-2} \tag{9-23}$$

称为残余方差，它可以看作在排除了 x 对 y 的线性影响后(或者当 x 固定

时)，衡量 y 随机波动大小的一个估计量。残余方差的正平方根

$$\sigma=\sqrt{\frac{Q}{N-2}} \tag{9-24}$$

称为残余标准差，与 σ^2 的意义相似，它可以用来衡量所有随机因素对 y 的一次性观测的平均变差的大小，σ 愈小，回归直线的准确度愈高。当回归方程的稳定性较好时，σ 可作为应用回归方程时的不确定度评定参数。

4. 方差分析表

上述把平方和及自由度进行分解的方差分析，所有结果可归纳在一个简单的表格中，这种表格称为方差分析表(表 9-4)。

表 9-4

来　源	平方和	自由度	方　差	F	显著性
回　归	$U=bl_{xy}$	1	$\sigma^2=Q/(N-2)$	$F=\frac{U/1}{Q/(N-2)}$	—
残　余	$Q=l_{yy}-bl_{xy}$	$N-2$			
总　计	$S=l_{yy}$	$N-1$	—	—	—

【例 9-2】 在例 9-1 电阻对温度的回归中，由表 9-3 及表 9-4 可得表 9-5 的方差分析结果。

表 9-5

来　源	平方和	自由度	方　差	F	显著性
回　归	60.574	1	—	1.18×10^3	$\alpha=0.01$
残　余	0.257	5	0.051 4	—	—
总　计	60.831	6	—	—	—

显著性一栏中的 $\alpha=0.01$，表明前面所得的回归方程(9-11)在 $\alpha=0.01$ 水平上显著。即可信赖程度为 99%以上，这是高度显著的。

利用回归方程，可以在一定显著水平 α 上，确定与 x 相对应的 y 的取值范围。反之，若要求观测值 y 在一定的范围内取值，利用回归方程可以确定自变量 x 的控制范围。

三、重复实验判断回归方程拟合性

应该指出，用残余平方和检验回归平方和所作出的“回归方程显著”这一判断，只表明相对于其他因素及实验误差来说，因素 x 的一次项对指标 y 的影响是主要的，但它并没有告诉我们，影响 y 的除 x 外，是否还有一个或几个不可忽略的其他因素，以及 x 和 y 的关系是否确实为线性。换言之，上述意义的回归方程显著，并不一定表明这个回归方程是拟合得很好，其原因是由于残余平方和中除包括实验误差外，还包括了 x 和 y 线性关系以

外的其他未加控制的因素的影响。为了检验一个回归方程拟合得好坏，可以做些重复实验，从而获得误差平方和 Q_E 和失拟平方和 Q_L（它反映了非线性及其他未加控制的因素的影响），用误差平方和对失拟平方和进行 F 检验，就可以确定回归方程拟合得是好是坏。

设取 N 个测试点，每个测试点都重复 m 次测试，此时各种平方和及其相应的自由度可按下列各式计算：

$$S = U + Q_L + Q_E \tag{9-25}$$

$$\nu_S = \nu_U + \nu_L + \nu_E \tag{9-26}$$

$$S = \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}(y_{ti} - \bar{y})^2,\ \nu_S = Nm - 1 \tag{9-27}$$

$$U = m\sum_{t=1}^{N}(\hat{y}_t - \bar{y})^2,\ \nu_U = 1 \tag{9-28}$$

$$Q_E = \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}(y_{ti} - \bar{y}_t)^2,\ \nu_{Q_E} = N(m-1) \tag{9-29}$$

$$Q_L = m\sum_{t=1}^{N}(\bar{y}_t - \hat{y}_t)^2,\ \nu_{Q_L} = N - 2 \tag{9-30}$$

【例 9-3】 用标准压力计对某固定压力传感器进行检定，检定所得数据如表 9-6 所示。表中，x_t 为标准压力，y_{ti} 为传感器输出电压，$\bar{y}_t$ 为 4 次读数的算术平均值，试对仪器定标，并分析仪器的测量误差。

表 9-6

序　号	$x_t/(\mathrm{N\cdot cm^{-2}})$	y_{ti}/mV				$\bar{y}_t$/mV
		升　压	降　压	升　压	降　压	
1	0	2.78	2.80	2.80	2.86	2.81
2	1	9.70	9.76	9.78	9.78	9.755
3	2	16.60	16.71	16.70	16.76	16.692 5
4	3	23.54	23.56	23.58	23.71	23.597 5
5	4	30.44	30.51	30.54	30.64	30.532 5
6	5	37.35	37.45	37.42	37.50	37.43
7	6	44.28	44.35	44.30	44.38	44.327 5
8	7	51.19	51.25	51.18	51.25	51.217 5
9	8	58.06	58.08	58.12	58.14	58.1
10	9	64.92	64.96	64.94	65.00	64.955
11	10	71.73	71.73	71.75	71.75	71.74

仪器要求线性定标，故应拟合一条回归直线，可以证明，用平均值 11 个点拟合的回归直线与原来的 44 个点拟合的回归直线完全一样。具体计算

见表 9-7 和表 9-8（表中 y_i 即为表 9-6 中的 $\bar{y}_i$）。

表 9-7

序　号	x_i/(N·cm^{-2})	$\bar{y}_i$/(mV)	x_i^2/(N·cm^{-2})^2	$\bar{y}_i^2$/mV^2	$x_i\bar{y}_i$/(mV·N·cm^{-2})
1	0	2.810 0	0	7.896 1	0
2	1	9.750	1	95.160 0	9.755 0
3	2	16.692 5	4	278.639 6	33.385 0
4	3	23.597 5	9	556.842 0	70.792 5
5	4	30.532 5	16	932.233 6	122.130 0
6	5	37.430 0	25	1 401.004 9	187.150 0
7	6	44.327 5	36	1 964.927 3	265.965 0
8	7	51.217 5	49	2 623.232 3	358.522 5
9	8	58.100 0	64	3 375.610 0	464.800 0
10	9	64.955 0	81	4 219.152 0	584.595 0
11	10	71.740 0	100	5 146.627 6	717.400 0
$\sum$	55	411.157 5	385	20 601.325 4	2 814.495 0

表 9-8

$\sum_{i=1}^{N} x_i = 55$	$\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i = 411.157\ 5$	$N = 11$
$\bar{x} = 5$	$\bar{y} = 37.378\ 0$	$\sum_{i=1}^{N} x_i\bar{y}_i = 2\ 814.495\ 0$
$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 385$	$\sum_{i=1}^{N} y_i^2 = 20\ 601.325\ 4$	$\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i\right)}{N}$
$\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N} = 275$	$\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i\right)^2}{N} = 15\ 368.226\ 4$	$= 2\ 055.787\ 5$
$l_{xx} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N} = 110$	$l_{yy} = \sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i\right)^2}{N} = 5\ 233.099\ 0$	$l_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i\bar{y}_i - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i\right)}{N} = 758.707\ 5$

$$b = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = 6.897\ 34$$

$$b_0 = \bar{y} - b\bar{x} = 2.891\ 3$$

$$\hat{y} = 2.891\ 3 + 6.897\ 34x$$

现在进行方差分析，当用 $\bar{y}_i$ 求回归直线时，各平方和可按下式顺序计算

$$\left.\begin{aligned} U &= mbl_{xy} \\ Q_l &= ml_{yy} - U \\ Q_E &= \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}(y_{ti} - \bar{y}_t)^2 \\ S &= U + Q_l + Q_E \end{aligned}\right\} \tag{9-31}$$

计算结果列于表9-9。

表 9-9

来　源	平方和/(mV)^2	自由度	方差/(mV)^2	F	显著性
回　归	20 932.257 4	1	20 932.257 4	6.98×10^6	$F_{0.01}=7.47$
失　拟	0.138 6	9	0.015 4	5.13	$F_{0.01}=3.01$
误　差	0.100 0	33	0.003 0	—	—
总　计	20 932.486 0	43	—	—	—

表中 F 栏为用误差平方和对相应的平方和项进行 F 检验的数学统计量。其中

$$F_1 = \frac{Q_L/\nu_{Q_L}}{Q_E/\nu_{Q_E}} = 5.13 \tag{9-32}$$

$$F_1 > F_{0.01}(9, 33) = 3.01$$

因为对失拟平方和进行 F 检验结果高度显著，说明失拟误差相对于实验误差来说是不可忽略的，这时有如下几种可能：

1) 影响 y 的除 x 外，至少还有一个不可忽略的因素；

2) x 和 y 是曲线关系；

3) x 和 y 无关。

总之，所选择的一元线性回归这个数学模型与实际情况不符合。失拟平方和 Q_L 和失拟方差反映了拟合误差，通常称为模型误差。

如果 F_1 检验结果不显著，说明非线性误差(相对于实验误差)很小，或者基本上是由实验误差等随机因素引起的。于是可把失拟平方和 Q_L 与误差平方和 Q_E 合并，对回归平方和进行 F 检验，即

$$F_2 = \frac{U/\nu_U}{(Q_L + Q_E)/(\nu_{Q_L} + \nu_{Q_E})} \tag{9-33}$$

如果第二次 F 检验结果显著，说明一元回归方程拟合得好。

对于给定的显著性水平 α，如果 F_2 不显著，那么这时有两种可能：

1) 没有什么因素对 y 有系统的影响；

2) 实验误差过大。

当然所求的回归方程不理想。

现在我们继续对例9-3作进一步分析。

F_1 检验结果显著，回归方程是否就没有用了呢？不妨再用 Q_E 对 U 进行第二次 F 检验

$$F_2 = \frac{U/\nu_U}{Q_E/\nu_{Q_E}} = 6.98 \times 10^6 \gg F_{0.01}(1, 33) = 7.47$$

结果高度显著。再用 $Q_E + Q_L = Q$ 对 U 进行第二次 F 检验

$$F_2 = \frac{U/\nu_U}{Q/\nu_Q} = 3.68 \times 10^6 \gg F_{0.01}(1, 42) = 7.28$$

也高度显著。由于 F_1 检验结果显著，虽然相对于实验误差来讲，此方程不能说拟合得很好。但是由于两种 F_2 检验都高度显著，实验误差和残余误差都很小，只要残余标准差 σ 小于该仪器所要求的不确定度参数，就可以使用此方程对该仪器进行定标。当然，若有必要，可进一步查明原因，重作回归方程。

从以上分析可以看出，在一般情况下，重复实验可将误差平方和与失拟平方和从残余平方和中分离出来，这对统计分析是有好处的。同时，在精密测试中，通常失拟平方和及误差平方和分别与仪器的原理误差（定标误差、非线性误差）及仪器的重复性误差相对应。可以用这种方法分析传感器和非电量电测仪器及其他类似需要变换参量的测量仪器的不确定度，这对了解这类仪器的误差来源是有益的。当然，有时重复实验受到时间、设备、经费等条件限制而不可能，只能用残余平方和对回归平方和进行 F 检验，它也可以大致说明回归效果的好坏。习惯上，经常也把这种检验结果显著与不显著说成拟合得好与坏。但需要注意，一个方程拟合得好的真正含义应该是上面所谈的内容。

四、回归直线的简便求法

回归分析以最小二乘法为基础，因此所建立的回归直线误差（标准差）最小，但它的计算一般是比较复杂的。为了减少计算，在准确度要求不太高或实验数据线性较好的情况下，可采用如下简便方法。

1. 分组法（平均值法）

用分组法求回归方程 $\hat{y} = b_0 + bx$ 中的系数 b_0 和 b 的具体作法是：将自变量数据按由小到大的次序安排，分成个数相等或近于相等的两个组（分组数等于欲求的未知数个数）：第一组为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$；第二组为 $x_{k+1}, \cdots, x_N$，建立相应的两组观测方程：

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_0 + bx_1 \\ &\vdots \\ y_k &= b_0 + bx_k \end{aligned}\right\} \quad 和 \quad \left.\begin{aligned} y_{k+1} &= b_0 + bx_{k+1} \\ &\vdots \\ y_N &= b_0 + bx_N \end{aligned}\right\}$$

两组观测方程分别相加，得到关于 b_0 及 b 的方程组

$$\left.\begin{aligned}\sum_{t=1}^{k} y_t &= kb_0 + b\sum_{t=1}^{k} x_t \\ \sum_{t=k+1}^{N} y_t &= (N-k)b_0 + b\sum_{t=k+1}^{N} x_t\end{aligned}\right\} \tag{9-34}$$

该方程组可解得 b 及 b_0。特别当 $N=2k$ 时，回归系数

$$\left.\begin{aligned}b &= \frac{\sum_{t=1}^{N/2} y_t - \sum_{t=N/2+1}^{N} y_t}{\sum_{t=1}^{N/2} x_t - \sum_{t=N/2+1}^{N} x_t} \\ b_0 &= \frac{\sum_{t=1}^{N} y_t}{N} - b\frac{\sum_{t=1}^{N} x_t}{N} = \bar{y} - b\bar{x}\end{aligned}\right\} \tag{9-35}$$

【例 9-4】　对例 9-1 用分组法求回归方程。

因观测数据已按自变量从小到大的次序排列，故可按实验顺序分成两组，并建立两组相应的观测方程[取 $k=N+1)/2=4$]，然后分别相加：

$76.30=b_0+19.1\,b$	
$77.80=b_0+25.0\,b$	$82.35=b_0+40.0b$
$79.75=b_0+30.1\,b$	$83.90=b_0+46.5b$
$80.80=b_0+36.0\,b$	$85.10=b_0+50.0b$
$314.65=4b_0+110.2b$	$251.35=3b_0+136.5\,b$

$$\left.\begin{aligned}4b_0+110.2b&=314.65\\3b_0+136.5b&=251.35\end{aligned}\right\}$$

得　　　$b_0=70.80$，$b=0.285\,3$

故所求的回归方程为

$$\hat{y}=70.80+0.285\,3x$$

这与最小二乘法求得的回归方程式(9-13)比较接近。

此法简单明了，拟合的直线是通过第一组重心和第二组重心的一条直线，这是工程实践中常用的一种简单方法。

2. 图解法(紧绳法)

把 N 对观测数据画出散点图于坐标纸上，假如画出的点形成一条直线带，就在点群中画一条直线，使得多数点位于直线上或接近此直线并均匀分布在直线的两边。这条直线可以近似地作为回归直线，回归系数可以直

接出图中求得，利用此直线也可在坐标纸上直接进行预报。

【例 9-5】 用 X 光机检查镁合金焊接件及铸件内部缺陷时，为达到最佳灵敏度，透照电压 y 应随被透照件厚度 x 而改变。经实验得如表 9-10 所示的一组数据：

表 9-10

x/mm	12	13	15	16	18	20	22	24	26
y/kV	52	55	60	65	70	75	80	85	90

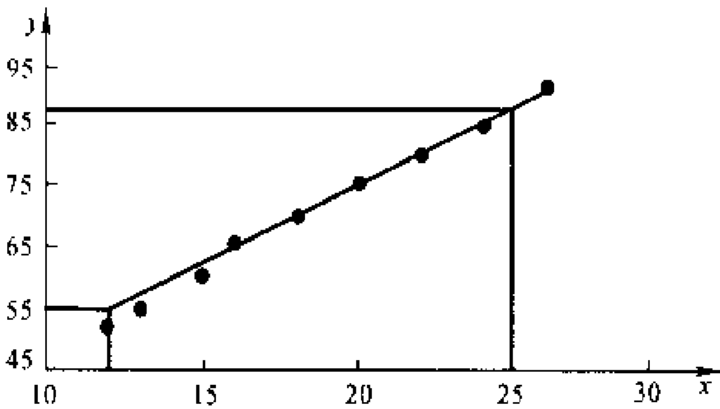


图 9-3

把这组数据点在坐标纸上，然后通过点群作一直线(图 9-3)。在接近直线的两端各取一点，如(12,53)和(25,88)，回归系数$b=(53-88)/(12-25)=2.7\text{kV/mm}$。回归直线上任一点代入回归方程可求出 b_0，如 $53=b_0+2.7\times12$，$b_0=20.6\text{kV}$。故所求回归方程为

$$\hat{y}=20.6+2.7x$$

图解法由于作图时完全凭经验画直线，主观性较大，精度较低，但此法非常简单，精度要求不高时可采用。

第三节　一元非线性回归

在实际问题中，有时两个变量之间的内在关系并不是线性关系，而是某种曲线关系，这时若求所需的回归线，一般地说，可以分两步进行：

1) 确定函数类型。

2) 求解相关函数中的未知参数。用最小二乘法直接求解非线性回归方程是非常复杂的，通常是通过变量代换把回归曲线转换成回归直线，继而用前面给出的方法求解；或者把回归曲线展成回归多项式，直接用回归多项式来描述两个变量之间的关系，这样就把解曲线回归问题转化为解多项式回归的问题。

一、回归曲线类型的选取和检验

1. 直接判断法

根据专业知识，从理论上推导或者根据以往的经验，可以确定两个变量之间的函数类型，如化学反应物质的浓度 y 一般与时间 x 有指数关系，即 $y=y_0 e^{kx}$，其中 y_0 及 k 为待定系数和指数。

2. 观测法

将观测数据作图，将其与典型曲线(图 9-4)比较，确定其属于何种类型。所选择的曲线类型是否合适，可用如下介绍的直线检验方法、表差法等方法来检验。

3. 直线检验法

当函数类型中所含参数不多，例如只有一个或两个时，用此法较好，其步骤如下：

1)将预选的回归曲线 $f(x, y, a, b)=0$ 写成

$$Z_1 = A + BZ_2 \tag{9-36}$$

式中的 Z_1 和 Z_2 只含一个变量(x 或 y)的函数，A 和 B 是 a 和 b 的函数；

2)求出几对与 x，y 相对应的 Z_1 和 Z_2 的值，这几对值以选择 x，y 值相距较远为好；

3)以 Z_1 和 Z_2 为变量画图，若所得图形为一直线，则证明原先所选定的回归曲线类型是合适的。

【例 9-6】 用此法说明表 9-11 中的一组数据是否可用 $y=ae^{bx}$ 表示。

表 9-11

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1.78	2.24	2.74	3.74	4.15	5.31	6.92	8.85	10.97
$\lg y$	0.250	0.350	0.438	0.573	0.648	0.725	0.840	0.917	1.040

将 $y=ae^{bx}$ 写成式(9-36)形式，即

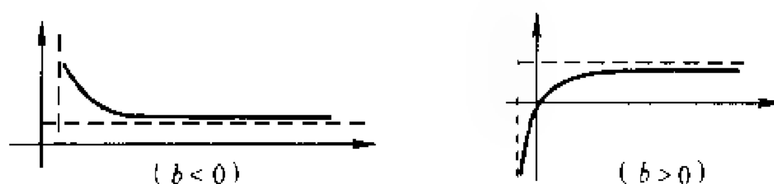
$$\lg y=\lg a+(b\lg e)\ x$$

式中 $\lg y$ 相当于 Z_1，x 相当于 Z_2，$\lg a$ 相当于 A，$b\lg e$ 相当于 B，以 $\lg y$ 与 x 画图(取 x 为 1，4，6，8 四点)，所得图形为一条直线(图 9-5)，故选用的函数类型 $y=ae^{bx}$ 是合适的。

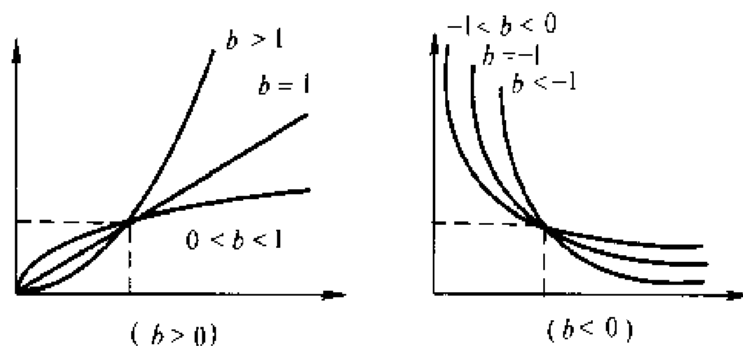
下列几种类型的曲线方程式可用直线检验法

$$y=a+b\lg x$$

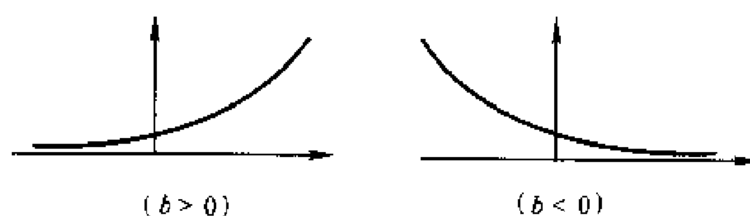
$$y=ab^x$$



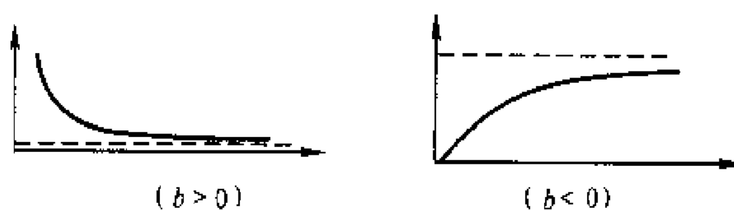
(a) 双曲线 $\frac{1}{y}=a+\frac{b}{x}$



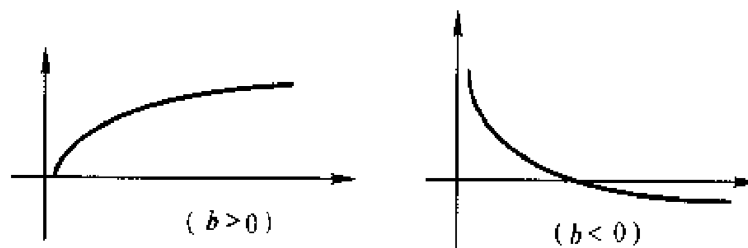
(b) 幂函数 $y=ax^b$ 的曲线



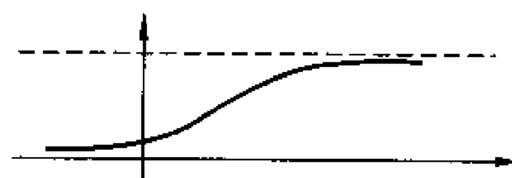
(c) 指数曲线 $y=ae^{bx}$



(d) 指数曲线 $y=ae^{b/x}$



(e) 对数曲线 $y=a+b\log x$



(f) S形曲线 $y=\frac{1}{a+be^{-x}}$

图 9-4　典型曲线

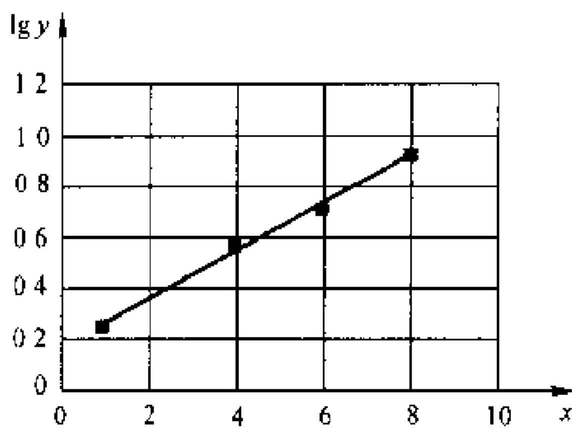


图 9-5

$$y = ae^{bx}$$
$$y = ax^b$$
$$y = \frac{x}{a + bx}$$

4. 表差法

若一组试验数据可用一多项式表示，式中含有常数的项多于两个时，则用表差法决定方程的次数或检验方程的次数较为合理，其步骤如下：

1)用实验数据画图。

2)自图上根据定差 Δx，列出 x_i，y_i 各对应值。

3)根据 x，y 的读数值作出差值 Δ_y^k，而

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$，$\Delta y_2 = y_3 - y_2$，$\Delta y_3 = y_4 - y_3$，…为第一阶差；

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$，$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$，…为第二阶差；

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$…为第三阶差；

……

表 9-12 列出了常见方程式类型及用表差法确定这些方程式的次数时的步骤和标准。

表 9-12

序号	方程式类型	根据 Δx、$\Delta(1/x)$或 $\Delta\log x$ 为常数的步骤		确定方程的标准
		画图、作表	求顺序差值	
1	$y=a+bx+cx^2+\cdots+qx^n$	$y=f(x)$	Δy；$\Delta^2 y$，$\Delta^3 y$，…，$\Delta^n y$	$\Delta^n y$ 为常数
2	$y=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\cdots+\frac{q}{x^n}$	$y=f(1/x)$	Δy；$\Delta^2 y$，$\Delta^3 y$，…，$\Delta^n y$	$\Delta^n y$ 为常数
3	$y^2=a+bx+cx^2+\cdots+qx^n$	$y^2=f(x)$	Δy^2；$\Delta^2 y^2$；$\Delta^3 y^2$，…，$\Delta^n y^2$	$\Delta^n y^2$ 为常数
4	$\log y=a+bx+cx^2+\cdots+qx^n$	$\log y=f(x)$	$\Delta(\log y)$；$\Delta^2(\log y)$，…，$\Delta^n(\log y)$	$\Delta^n(\log y)$ 为常数

续表

序号	方程式类型	根据 Δx、$\Delta(1/x)$或 $\Delta\log x$ 为常数的步骤		确定方程的标准
		画图、作表	求顺序差值	
5	$y=a+b(\log x)+c(\log x)^2$	$y=f(\log x)$	Δy; $\Delta^2 y$	$\Delta^2 y$ 为常数
6	$y=ab^x=ae^{b'x}$	$\log y=f(x)$	$\Delta(\log y)$	$\Delta(\log y)$ 为常数
7	$y=a+bc^x=a+be^{c'x}$	$y=f(x)$	Δy; $\log\Delta y$; $\Delta(\log\Delta y)$	$\Delta(\log\Delta y)$ 为常数
8	$y=a+bx+cd^x=a+bx+ce^{d'x}$	$y=f(x)$	Δy; $\Delta^2 y$; $\log\Delta^2 y$; $\Delta(\log\Delta^2 y)$	$\Delta(\log\Delta^2 y)$ 为常数
9	$y=ax^b$	$\log y=f(\log x)$	$\Delta(\log y)$	$\Delta(\log y)$ 为常数
10	$y=a+bx^c$	$y=f(\log x)$	Δy; $\log\Delta y$; $\Delta(\log\Delta y)$	$\Delta(\log\Delta y)$ 为常数
11	$y=ae^{bx}$	$\log y=f(x)$	$\Delta\ln y$; $\Delta\ln x$	$(\Delta\ln y-\Delta\ln x)$为常数

【例 9-7】 检验表 9-13 所示观测数据可用 $y=a+be^x$ 表示。

具体检验方法如下，第一步将观测值 x 与 y 画图，得曲线如图 9-6 所示；第二步，自曲线上按 Δx 为恒定值(此处 $\Delta x=1$)，依次读取 x，y 对应值，列入表中；然后再依次求出 Δy，$\lg\Delta y$ 以及 $\Delta(\lg\Delta y)$。因表中$\Delta(\lg\Delta y)$极接近常数，故此组观测数据可用上式表示。

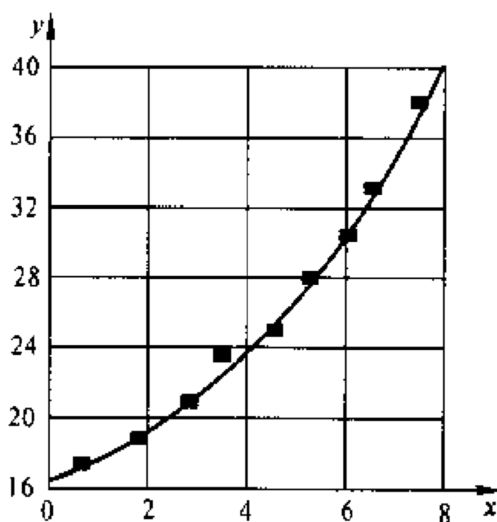


图 9-6

表 9-13

观测值		图上读数值		顺序差值		
x	y	x	y	Δy	$\lg\Delta y$	$\Delta(\lg\Delta y)$
0.50	17.3	0	16.6			
1.75	19.0	1	17.9	1.3	0.114	
2.75	21.0	2	19.5	1.6	0.204	0.090
3.50	23.5	3	21.5	2.0	0.301	0.097
4.50	25.1	4	23.9	2.4	0.380	0.079
5.25	28.0	5	26.9	3.0	0.477	0.097
6.00	30.3	6	30.6	3.7	0.568	0.091
6.50	33.0	7	35.1	4.5	0.653	0.085
7.50	38.0	8	40.8	5.7	0.756	0.103

二、化非线性回归为线性回归

可用直线检验法或一阶表差法检验的回归方程都可以通过变量代换转为直线回归方程。

【例 9-8】 为了测定椭圆齿轮流量计在介质粘度变化时的误差，先测定10号变压器油的粘度 y 与温度 x 的变化曲线，以便实验时测出油温就可以知道粘度。通过试验获得如表 9-14 所示的一组数据(单位略)：

表 9-14

x	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
y	4.21	3.51	2.92	2.52	2.20	2.00	1.81	1.70	1.60	1.50	1.43	1.37	1.32	1.29	1.25

试求出粘度与温度之间的经验公式。

首先把观测数据点在坐标纸上用一条曲线拟合(图 9-7)，将该曲线与图 9-4 中的典型曲线比较，看来很像幂函数 $y=ax^b$，因此，我们取函数类型为

$$y = ax^b \tag{9-37}$$

对等式两边取对数

$$\ln y = \ln a + b\ln x \tag{9-38}$$

令 $y'=\ln y$，$x'=\ln x$，$b_0=\ln a$

则式(9-38)即为

$$y' = b_0 + bx' \tag{9-39}$$

式(9-39)即为普通的直线方程，仍用列表法解此方程(见表 9-15，表 9-16)。

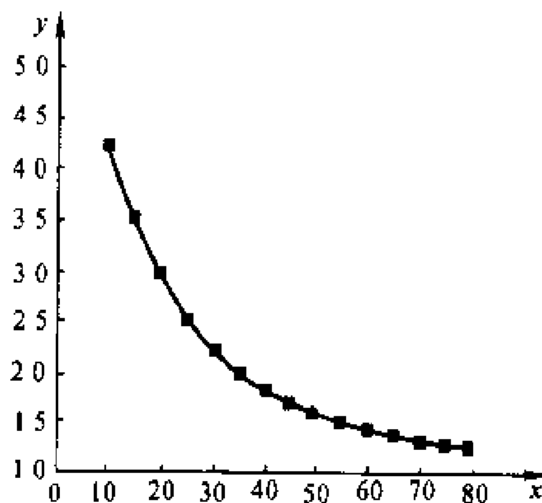


图 9-7

表 9-15

序　号	x	y	$x'=\ln x$	$y'=\ln y$	x'^2	y'^2	$x'y'$
1	10	4.24	2.302 6	1.444 6	5.301 90	2.086 76	3.326 23
2	15	3.51	2.708 1	1.255 6	7.333 54	1.576 57	3.400 27
3	20	2.92	2.995 7	1.071 6	8.974 41	1.148 29	3.210 18
4	25	2.52	3.218 9	0.924 3	10.361 16	0.854 25	2.975 07
5	30	2.20	3.401 2	0.788 5	11.568 14	0.621 66	2.681 70
6	35	2.00	3.555 3	0.693 1	12.640 50	0.480 15	2.464 38
7	40	1.81	3.688 9	0.593 3	13.607 83	0.352 04	2.188 71
8	45	1.70	3.806 7	0.530 6	14.490 68	0.281 57	2.019 92
9	50	1.60	3.912 0	0.470 0	15.303 92	0.220 90	1.838 67
10	55	1.50	4.007 3	0.405 5	16.058 72	0.164 40	1.624 33
11	60	1.43	4.094 3	0.357 7	16.763 66	0.127 93	1.464 44
12	65	1.37	4.174 4	0.314 8	17.425 51	0.099 10	1.314 14
13	70	1.32	4.248 5	0.277 6	18.049 71	0.077 08	1.179 52
14	75	1.29	4.317 5	0.254 6	18.640 70	0.064 84	1.099 41
15	80	1.25	4.382 0	0.223 1	19.202 10	0.049 79	0.977 82
Σ	675	30.66	54.813 4	9.604 9	205.722 48	8.205 63	31.764 74

表 9-16

$\sum x'=54.813\ 4$	$\sum y'=9.604\ 9$	$N=15$
$\overline{x'}=3.654\ 2$	$\overline{y'}=0.640\ 3$	
$(\sum x')^2/N=200.300\ 80$	$(\sum y')^2/N=6.150\ 27$	$(\sum x')(\sum y')/N=35.098\ 48$
$l_{xx}=5.421\ 90$	$l_{yy}=2.055\ 36$	$l_{xy}=-3.333\ 74$

$$b=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=\frac{-3.333\ 74}{5.421\ 90}=-0.614\ 9$$

$$b_0=\overline{y'}-b\overline{x'}=0.640\ 3+0.614\ 9\times 3.654\ 2=2.887\ 3$$

$$\ln\hat{y}=2.887\ 3-0.614\ 9\ln x$$

$$\hat{y}=17.94x^{-0.614\ 9}$$

三、回归曲线效果与不确定度评定

求曲线回归方程的目的是要使所配曲线与观测数据拟合较好，因此，在计算回归曲线的残余平方和 Q 时，不能用 y'_i 和 $\hat{y}'_i$ 以及式(9-19)，而是要

按定义用 y_t 和 $\hat{y}_t$ 及式(9-17)计算。这里可用相关指数 R^2 作为衡量配后曲线效果好坏的指标。

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{N}(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{N}(y_t - \bar{y})^2} \tag{9-40}$$

R 也称相关系数，但要记住，它与经过变量变换后的 x'，y' 的线性相关系数不是一回事。R^2(或 R)越大，越接近 1，则表明所配曲线的效果越好。

与线性回归一样，量 $\sigma=\sqrt{Q/(N-2)}$ 称为残余标准差，它可以作为根据回归方程预报 y 值的不确定度指标。

【例 9-9】 对例 9-8 计算残余平方和 Q，残余标准差 σ 和相关指数 R^2。

计算可按表 9-17 进行。

表 9 17

序　号	y	y^2	$\hat{y}$	$y-\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$
1	4.24	17.977 6	4.355	−0.115	0.013 225
2	3.51	12.320 1	3.394	0.116	0.013 456
3	2.92	8.526 4	2.844	0.076	0.005 776
4	2.52	6.350 4	2.479	0.041	0.001 681
5	2.20	4.840 0	2.216	−0.016	0.000 256
6	2.00	4.000 0	2.016	−0.016	0.000 256
7	1.81	3.276 1	1.857	−0.047	0.002 209
8	1.70	2.890 0	1.727	−0.027	0.000 729
9	1.60	2.560 0	1 619	−0 019	0.000 361
10	1.50	2.250 0	1.527	−0.027	0.000 729
11	1.43	2.044 9	1 447	−0.017	0.000 289
12	1.37	1.876 9	1.378	−0 008	0.000 064
13	1.32	1.742 4	1.316	0.004	0.000 016
14	1.29	1.664 1	1.262	0.028	0.000 784
15	1.25	1.562 5	1 213	0.037	0.001 369
Σ	30.66	73.881 4	−	0.010	0.041 200

$$Q = \sum_{t=1}^{N}(y_t - \hat{y}_t)^2 = 0.041\ 2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q}{N-2}} = 0.056$$

$$\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2=\sum_{t=1}^{N}y_t^2-\left(\sum_{t=1}^{N}y_t\right)^2/N=11.212$$

$$R^2=1-\frac{Q}{\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2}\doteq 0.9963$$

这说明该曲线拟合得较好。

需要指出的是，在化曲线为直线的回归计算中，通常 y 也作了变换，如幂函数曲线方程式(9-37)，经变换后，按最小二乘法是使 $\sum_{t=1}^{N}(\ln y-\ln\hat{y})^2$ 达到最小值，所以实际上所求的回归曲线不能说用最小二乘法所配的曲线为最佳的拟合曲线。因此，必要时可用不同类型函数计算后进行比较。择其最优者。比较时，可比较 Q，σ，R^2 这三个量中任一个，Q，σ 小者为优，而 R^2 大者为优。

对变量代换后的直线方程与一般直线方程一样也可作显著性检验。它可反映变量代换后的直线拟合情况。一般地说，它可作为曲线拟合好坏的参考，但它不能确切地表明原始变量 x 和 y 之间的拟合情况。

第四节　多元线性回归

前面讨论了两个变量之间实验结果的数学表示——一元回归问题，但在很多工程技术和科学实验问题中，常常需要讨论多个变量之间实验结果的数学表示，这就是多元回归分析问题。

一、二元线性回归方程的求法

假如因变量 y 与另外两个变量 x_1，x_2 的内在联系是线性的，通过实验得到 N 组观测数据：

$$(x_{t1},x_{t2},y_t)\qquad t=1,2,\cdots,N \tag{9-41}$$

那么这批数据可以有如下的结构形式：

$$\left.\begin{aligned}y_1&=\beta_0+\beta_1x_{11}+\beta_2x_{12}+\varepsilon_1\\y_2&=\beta_0+\beta_1x_{21}+\beta_2x_{22}+\varepsilon_2\\&\vdots\\y_N&=\beta_0+\beta_1x_{N1}+\beta_2x_{N2}+\varepsilon_N\end{aligned}\right\} \tag{9-42}$$

式中，β_0，β_1，β_2 为三个待估计参数；x_1，x_2 最两个可以准确测量或控制的一般变量；ε_1，ε_2，…，ε_N 是 N 个相互独立且服从同一正态分布 $N(0,\sigma)$ 的

随机变量。这就是二元线性回归的数学模型。

用最小二乘估计参数β，设b_0，b_1，b_2分别是参数β_0，β_1，β_2的最小二乘估计，则回归方程为

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \tag{9-43}$$

观测值y_t的残余误差为

$$v_t = y_t - \hat{y}_t \qquad (t = 1, 2, \cdots, N) \tag{9-44}$$

由最小二乘法可知，b_0，b_1，b_2应使得全部观测值y_t与回归值$\hat{y}_t$的残差平方和达到最小，即

$$Q = \sum_{t=1}^{N}(y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - b_1 x_{t1} - b_2 x_{t2})^2 = 最小$$

Q是b_0，b_1，b_2的非负二次式，所以最小值一定存在。根据极值定理，b_0，b_1，b_2应是下列方程组的解：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial b_0} &= -2\sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - b_1 x_{t1} - b_2 x_{t2}) = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial b_1} &= -2\sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - b_1 x_{t1} - b_2 x_{t2})x_{t1} = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial b_2} &= -2\sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - b_1 x_{t1} - b_2 x_{t2})x_{t2} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{9-45}$$

此方程组称为正规方程组，它可以进一步化为

$$\left.\begin{aligned}
Nb_0 + \left(\sum_{t=1}^{N} x_{t1}\right)b_1 + \left(\sum_{t=1}^{N} x_{t2}\right)b_2 &= \sum_{t=1}^{N} y_t \\
\left(\sum_{t=1}^{N} x_{t1}\right)b_0 + \left(\sum_{t=1}^{N} x_{t1}^2\right)b_1 + \left(\sum_{t=1}^{N} x_{t1} x_{t2}\right)b_2 &= \sum_{t=1}^{N} x_{t1} y_t \\
\left(\sum_{t=1}^{N} x_{t2}\right)b_0 + \left(\sum_{t=1}^{N} x_{t2} x_{t1}\right)b_1 + \left(\sum_{t=1}^{N} x_{t2}^2\right)b_2 &= \sum_{t=1}^{N} x_{t2} y_t
\end{aligned}\right\} \tag{9-46}$$

解此正规方程组，就可以得出回归参数b_0，b_1和b_2。但是，通常为了简化计算，人们常以变量与其均值之差即($x_1-\bar{x}_1$，$x_2-\bar{x}_2$，$y-\bar{y}$)来建立另一形式的方程，这样变换的结果，可使正规方程组减少一个方程式。

由于　　$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$

因而　　$\bar{\hat{y}} = \bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2$

$$\hat{y} - \bar{y} = b_1(x_1 - \bar{x}_1) + b_2(x_2 - \bar{x}_2) \tag{9-47}$$

于是，式(9-47)的正规方程组就可表示为

$$\left.\begin{aligned} b_1\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)^2+b_2\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)&=\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(y_t-\bar{y})\\ b_1\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)+b_2\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)^2&=\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)(y_t-\bar{y})\end{aligned}\right\}\tag{9-48}$$

解此方程组，可得 b_1 和 b_2 为

$$b_1=\frac{\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(y_t-\bar{y})\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)^2-\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})(x_{t2}-\bar{x}_2)}{\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)^2\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)^2-\left[\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)\right]^2}\tag{9-49}$$

$$b_2=\frac{\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)(y_t-\bar{y})\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)^2-\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})(x_{t1}-\bar{x}_1)}{\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)^2\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)^2-\left[\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)\right]^2}\tag{9-50}$$

参数 b_1 和 b_2 确定后，就可以计算第三个参数 b_0，即

$$b_0=\bar{y}-b_1\bar{x}_1-b_2\bar{x}_2\tag{9-51}$$

为了记忆方便，我们记：

$$\left.\begin{aligned} l_{11}&=\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)^2=\sum_{t=1}^{N}x_{t1}^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)^2\\ l_{12}&=\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)=\sum_{t=1}^{N}x_{t1}x_{t2}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)\\ l_{22}&=\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)^2=\sum_{t=1}^{N}x_{t2}^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)^2\\ l_{1y}&=\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(y_t-\bar{y})=\sum_{t=1}^{N}x_{t1}y_t-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}y_t\right)\\ l_{2y}&=\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)(y_t-\bar{y})=\sum_{t=1}^{N}x_{t2}y_t-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}y_t\right)\\ l_{yy}&=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2=\sum_{t=1}^{N}y_t^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}y_t\right)^2\end{aligned}\right\}\tag{9-52}$$

这样式(9-49)和式(9-50)可以写为

$$b_1=\frac{l_{22}l_{1y}-l_{12}l_{2y}}{l_{11}l_{22}-l_{12}^2}\tag{9-53}$$

$$b_2 = \frac{l_{11}l_{2y} - l_{12}l_{1y}}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} \tag{9-54}$$

【例 9-10】 根据经验知道某变量 y 受变量 x_1，x_2 影响，通过试验获得表 9-18 的一批数据，试建立 y 对 x_1，x_2 的线性回归方程。

表 9-18

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
15.0	2.8	744	11.0	9.8	752
14.0	4.2	749	11.2	11.2	751
14.3	5.6	747	10.2	12.6	757
12.7	7.0	745	10.1	14.0	756
12.0	8.4	754	9.9	15.4	757

解： 先对数据按表 9-19 和表 9-20 进行处理得

$\bar{y}=12.07$，$\bar{x}_1=9.1$，$\bar{x}_2=751.2$，$l_{11}=161.7$，$l_{12}=162.4$，$l_{22}=211.6$，$l_{1y}=-67.97$，$l_{2y}=-70.94$

由式(9-53)和(9-54)得

$$b_1 = \frac{l_{22}l_{1y} - l_{12}l_{2y}}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} = \frac{211.6\times(-67.97) - 162.4\times(-70.94)}{161.7\times 211.6 - 162.4^2}$$

$$= \frac{-2\,861.769}{7\,841.96} = -0.365$$

$$b_2 = \frac{l_{11}l_{2y} - l_{12}l_{1y}}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} = \frac{-70.94\times 161.7 - 162.4\times(-67.97)}{161.7\times 211.6 - 162.4^2}$$

$$= \frac{-432.670}{7\,841.96} = -0.055$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 = 12.07 + 0.365\times 9.1 + 0.055\times 751.2$$

$$= 56.71$$

所求回归方程为　　$\hat{y}=56.71-0.365x_1-0.055x_2$

表 9-19

序　号	x_1	x_2	y	x_1^2	x_1x_2	x_2^2	x_1y	x_2y	y^2
1	2.8	744	15.0	7.84	2 083.2	553 536	42	11 160	225
2	4.2	749	14.0	17.64	3 145.8	561 001	58.8	10 486	196
3	5.6	747	14.3	31.36	4 183.2	558 009	80.08	10 682.1	204.49
4	7.0	745	12.7	49	5 215	555 025	88.9	9 461.5	161.29
5	8.4	754	12.0	70.56	6 333.6	568 516	100.8	9 048	144
6	9.8	752	11.0	96.04	7 369.6	565 504	107.8	8 272	121

续表

序号	x_1	x_2	y	x_1^2	x_1x_2	x_2^2	x_1y	x_2y	y^2
7	11.2	751	11.2	125.44	8 411.2	564 001	125.44	8 411.2	125.44
8	12.6	757	10.2	158.76	9 538.2	573 049	128.52	7 721.4	104.04
9	14.0	756	10.1	196	10 584	571 536	145.6	7 862.4	108.16
10	15.4	757	9.9	237.16	11 657.8	573 049	152.46	7 494.3	98.01
$\sum$	91	7 512	120.7	989.8	68 521.6	5 643 226	1 030.4	90 598.9	1 487.43

表 9-20

$$l_{11}=\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)^2=\sum_{t=1}^{N}x_{t1}^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)^2=161.7$$

$$l_{12}=\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)=\sum_{t=1}^{N}x_{t1}x_{t2}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)=162.4$$

$$l_{22}=\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)^2=\sum_{t=1}^{N}x_{t2}^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)^2=211.6$$

$$l_{1y}=\sum_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)y_t=\sum_{t=1}^{N}x_{t1}y_t-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}y_t\right)=-67.97$$

$$l_{2y}=\sum_{t=1}^{N}(x_{t2}-\bar{x}_2)y_t=\sum_{t=1}^{N}x_{t2}y_t-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}y_t\right)=-70.94$$

二、多元线性回归

假如因变量 y 与另外 M 个变量 x_1，x_2，…，x_M 的内在联系是线性的，通过试验得到 N 组观测数据：

$$(x_{t1},\ x_{t2},\ \cdots,\ x_{tM};\ y_t)\qquad t=1,2,\cdots,N$$

那么这批数据可以有如下的结构形式：

$$\left.\begin{aligned}y_1&=\beta_0+\beta_1x_{11}+\beta_2x_{12}+\cdots+\beta_Mx_{1M}+\varepsilon_1\\y_2&=\beta_0+\beta_1x_{21}+\beta_2x_{22}+\cdots+\beta_Mx_{2M}+\varepsilon_2\\&\ \vdots\\y_N&=\beta_0+\beta_1x_{N1}+\beta_2x_{N2}+\cdots+\beta_Mx_{NM}+\varepsilon_N\end{aligned}\right\}\tag{9-55}$$

式中，β_0，β_1，β_2，…，β_M 为 $M+1$ 个待估计参数；x_1，x_2，…，x_M 是 M 个可以准确测量或控制的一般变量；ε_1，ε_2，…，ε_N 是 N 个相互独立且服从同一正态分布 $N(0,\sigma)$ 的随机变量。用最小二乘估计参数 β，设 b_0，b_1，…，b_M 分别是参数 β_0，β_1，…，β_M 的最小二乘估计，则回归方程为

$$\hat{y}=b_0+b_1x_1+\cdots+b_Mx_M\tag{9-56}$$

观测值 y_t 的残余误差为

$$v_t = y_t - \hat{y}_t \qquad (t = 1, 2, \cdots, N) \tag{9-57}$$

由最小二乘法可知，b_0，b_1，…，b_M 应使得全部观测值 y_t 与回归值 $\hat{y}_t$ 的残差平方和达到最小，即

$$Q = \sum_{t=1}^{N}(y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - b_1 x_{t1} - \cdots - b_M x_{tM})^2 = \text{最小}$$

Q 是 b_0，b_1，…，b_M 的非负二次式，所以最小值一定存在。根据极值定理，b_0，b_1，…，b_M 应是下列方程组的解：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - b_1 x_{11} - \cdots - b_M x_{1M}) = 0\\
&\frac{\partial Q}{\partial b_i} = -2\sum_{t=1}^{N}(y_t - b_0 - b_1 x_{t1} - \cdots - b_M x_{tM})x_{ti} = 0\\
&i = 1, 2, \cdots, M
\end{aligned}\right\} \tag{9-58}$$

此方程组称为正规方程组，它可以进一步化为

$$\left.\begin{aligned}
&Nb_0 + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)b_1 + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)b_2 + \cdots + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{tM}\right)b_M = \sum_{t=1}^{N}y_t\\
&\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)b_0 + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}^2\right)b_1 + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}x_{t2}\right)b_2 + \cdots + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}x_{tM}\right)b_M = \sum_{t=1}^{N}x_{t1}y_t\\
&\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)b_0 + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}x_{t1}\right)b_0 + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}^2\right)b_0 + \cdots + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}x_{tM}\right)b_M = \sum_{t=1}^{N}x_{t2}y_t\\
&\qquad\vdots\\
&\left(\sum_{t=1}^{N}x_{tM}\right)b_0 + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{tM}x_{t1}\right)b_1 + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{tM}x_{t2}\right)b_2 + \cdots + \left(\sum_{t=1}^{N}x_{tM}^2\right)b_M = \sum_{t=1}^{N}x_{tM}y_t
\end{aligned}\right\} \tag{9-59}$$

解此正规方程组可得到 b_0，b_1，…，b_M 的解，这需要解 $M+1$ 个方程组，因而用矩阵方法来研究多元线性回归问题在形式上要简单。

令

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M}\\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_M \end{pmatrix} \tag{9-60}$$

则式(9-59)的矩阵形式为

$$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{9-61}$$

记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 则上式可表示为

$$\boldsymbol{Ab} = \boldsymbol{B} \tag{9-62}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{CB} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{9-63}$$

其中：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1M} & x_{2M} & x_{3M} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N & \sum_{t=1}^{N} x_{t1} & \sum_{t=1}^{N} x_{t2} & \cdots & \sum_{t=1}^{N} x_{tM} \\ \sum_{t=1}^{N} x_{t1} & \sum_{t=1}^{N} x_{t1}^2 & \sum_{t=1}^{N} x_{t1}x_{t2} & \cdots & \sum_{t=1}^{N} x_{t1}x_{tM} \\ \sum_{t=1}^{N} x_{t2} & \sum_{t=1}^{N} x_{t2}x_{t1} & \sum_{t=1}^{N} x_{t2}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^{N} x_{t2}x_{tM} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{t=1}^{N} x_{tM} & \sum_{t=1}^{N} x_{tM}x_{t1} & \sum_{t=1}^{N} x_{tM}x_{t2} & \cdots & \sum_{t=1}^{N} x_{tM}^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1M} & x_{2M} & x_{3M} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N} y_t \\ \sum_{t=1}^{N} x_{t1}y_t \\ \sum_{t=1}^{N} x_{t2}y_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{N} x_{tM}y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_M \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0M} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1M} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{M0} & c_{M1} & c_{M2} & \cdots & c_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_M \end{bmatrix}$$

或 $$b_k = c_{k0}B_0 + c_{k1}B_1 + \cdots + c_{kM}B_M, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, M \tag{9-64}$$

式中的 b_0，b_1，…，b_M 为所求回归方程的回归系数。

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可用行列式法或初等变换法求解。解线性方程组的方法很多，并不一定要求通过求逆矩阵的方法来解，但在进一步的统计分析中，我们要用到逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 中的元素，这样就使求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 成为必要了，另外应用电子计算机求逆矩阵也很方便。

这样，在处理多元系线性回归问题时，主要是计算下列四个矩阵：

$$\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 是多元线性回归模型中数据 y_t 的结构矩阵，它构成 N 次实验；$\boldsymbol{A}$ 是正规方程组的系数矩阵(也称信息矩阵)，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$；$\boldsymbol{C}$ 是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，亦称相关矩阵；$\boldsymbol{B}$ 是正规方程组的常数项矩阵，它实际上是个列向量。

在多元线性回归模型中，常用另一种数据结构式

$$y_t=\mu+\beta_1(x_{t1}-\bar{x}_1)+\beta_2(x_{t2}-\bar{x}_2)+\cdots+\beta_M(x_{tM}-\bar{x}_M)+\varepsilon_t$$
$$t=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{9-65}$$

相应的回归方程为

$$\hat{y}=\mu_0+b_1(x_1-\bar{x}_1)+b_2(x_2-\bar{x}_2)+\cdots+b_M(x_M-\bar{x}_M) \tag{9-66}$$

式中，$\bar{x}=\dfrac{\sum\limits_{t=1}^{N}x_{tj}}{N}$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ M$，它的结构矩阵 $\boldsymbol{X}$，常数项矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & x_{11}-\bar{x}_1 & x_{12}-\bar{x}_2 & \cdots & x_{1M}-\bar{x}_M\\ 1 & x_{21}-\bar{x}_1 & x_{22}-\bar{x}_2 & \cdots & x_{2M}-\bar{x}_M\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{N1}-\bar{x}_1 & x_{N2}-\bar{x}_2 & \cdots & x_{NM}-\bar{x}_M\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{t=1}^{N}y_t\\ \sum\limits_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)y_t\\ \vdots\\ \sum\limits_{t=1}^{N}(x_{tM}-\bar{x}_M)y_t\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=$$

$$\begin{bmatrix}N & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sum\limits_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)^2 & \sum\limits_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2) & \cdots & \sum\limits_{t=1}^{N}(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{tM}-\bar{x}_M)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \sum\limits_{t=1}^{N}(x_{tM}-\bar{x}_M)(x_{t1}-\bar{x}_1) & \sum\limits_{t=1}^{N}(x_{tM}-\bar{x}_M)(x_{t2}-\bar{x}_2) & \cdots & \sum\limits_{t=1}^{N}(x_{tM}-\bar{x}_M)^2\end{bmatrix}$$

令

$$l_{ij}=\sum_{t=1}^{N}(x_{ti}-\bar{x}_i)(x_{tj}-\bar{x}_j)=\sum_{t=1}^{N}x_{ti}x_{tj}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{ti}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}x_{tj}\right)$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ M \tag{9-67}$$

$$l_{jy}=\sum_{t=1}^{N}(x_{tj}-\bar{x}_j)y_t=\sum_{t=1}^{N}x_{tj}y_t-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{tj}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}y_t\right)$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ M$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}N & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1M}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & l_{M1} & l_{M2} & \cdots & l_{MM}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N & 0\\ 0 & \boldsymbol{L}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{N}y_t\\ l_{1y}\\ \vdots\\ l_{My}\end{bmatrix}$$

模型(9-65)的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 与一般模型(9-55)的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是有区别的，这在今后的计算中要特别注意。

这里矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1/N & 0\\ 0 & \boldsymbol{L}^{-1}\end{bmatrix}$$

于是，模型(9-65)的回归系数

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{CB}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\mu_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/N & 0\\ 0 & \boldsymbol{L}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{N}y_t\\ l_{1y}\\ \vdots\\ l_{My}\end{bmatrix}$$

即

$$\left.\begin{aligned}&\mu_0=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}y_t=\bar{y}\\ &\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_M\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}^{-1}\begin{pmatrix}l_{1y}\\ l_{2y}\\ \vdots\\ l_{My}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{9-68}$$

可见，模型(9-65)的优点不仅在于使得常数项回归系数 μ_0 与 b_0，b_1，…，b_M 无关，而且使求逆矩阵的运算降低一阶，减少了计算量。

这类问题的一般计算过程是，先求出

$$\sum_{t=1}^{N} y_t$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{tj}, \quad j = 1, 2, \cdots, M$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{ti}x_{tj}, \quad i \leqslant j;\ i, j = 1, 2, \cdots, M$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{tj}y_t, \quad j = 1, 2, \cdots, M$$

然后按式(9-67)求出 l_{ij} 和 l_{jy}，最后求出逆矩阵 $\boldsymbol{L}^{-1}$，按式(9-68)求出回归系数 μ_0，b_j，$j=1, 2, \cdots, M$。

三、多元线性回归的显著性检验与不确定度评定

一个回归方程是否反映客观规律，效果如何，主要靠实践来检验。从数学角度看，和一元回归类似，它也可以用数理统计检验的方法来检验。为此，要对多元线性回归进行方差分析。y 的总离差平方和 S，回归平方和 U 和残余平方和 Q 的计算及其相应的自由度如表 9-21 所示。此处，回归平方和表示在 y 的总离差平方和中，变量 x_1，x_2，…，x_M 与 y 的线性关系而引起 y 变化的部分，它的相应的自由度为自变量的个数 M。

表 9-21

来源	平方和	自由度	方差	F	显著性
回归	$U=\sum_{t=1}^{N}(\hat{y}_t-\bar{y})^2=\sum_{j=1}^{M}b_jl_{jy}$	M	$\frac{U}{M}$	$\frac{U/M}{\sigma^2}$	
残余	$Q=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)^2=l_{yy}-U$	$N-M-1$	$\sigma^2=\frac{Q}{N-M-1}$		
总计	$S=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2=l_{yy}$	$N-1$			

回归方程显著性的检验可使用残余平方和对回归平方和的 F 检验进行，表 9-21 中的 F 为 F 检验的数学统计量：

$$F=\frac{U/M}{Q/(N-M-1)}=\frac{U}{M\sigma^2} \tag{9-69}$$

和一元线性回归一样，当 $F \geqslant F_\alpha(M, N-M-1)$时，则认为回归方程在

α 水平上显著。

多元回归方程的预报不确定度由残余标准差来估计

$$\sigma=\sqrt{\frac{Q}{N-M-1}} \tag{9-70}$$

【例 9-11】 对例 9-10 中的回归问题进行方差分析。

解：总的离差平方和

$$S=l_{yy}=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2=\sum_{t=1}^{N}y_t^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}y_t\right)^2=30.58$$

回归平方和

$$U=b_1l_{1y}+b_2l_{2y}=-0.365\times(-67.97)-0.055\times(-70.94)=28.71$$

残余平方和

$$Q=S-U=30.58-28.71=1.87$$

计算结果列表如表 9-22 所示。

表 9-22

来 源	平方和	自由度	方 差	F	显著性
回 归 残 余	28.71 1.87	2 7	0.267 1	53.743 9	$\alpha=0.05$
总 计	30.58	9	—	—	—

$$\sigma=\sqrt{\frac{Q}{N-M-1}}=0.52$$

由于 $F=53.743\,9>F_{0.05}(2,7)=4.74$，因此回归方程在 $\alpha=0.05$ 水平上显著。

第五节 线性递推回归

前面介绍的回归方法，是一次性地利用全部测量数据计算回归系数。在动态测量中，数据往往是序贯测出的，而且有的要求进行实时处理，即每获得一个新数据，就要及时解算出回归模型的系数，若采用式(9-6)、(9-7)或式(9-63)每一个中间参数(如 B，C 或 l_{xx}，l_{xy} 等)都要重新计算，数据增加次数越多，计算工作量越大，其中很多计算是重复的，所以数据积累得越多，实时性越差。采用递推算法是解决上述问题的最佳方法，递推算法的基本思想是：首先根据初始值，利用式(9-6)、(9-7)或式(9-63)计算出回归系数初始值；新增加一组数据后，计算出新增数据带来的回归系数增量，回归系数初始值加上其增量就是回归系数新的解；再增加新数据时，按此法

类推解算。由于回归系数增加的计算工作量较少，而且无重复计算，提高了计算速度。

一、回归系数的递推计算公式

设回归模型为

$$y=b_0+b_1x_1+\cdots+b_Mx_M$$

观测量 N 组数据，根据式(9-63)可得到回归系数的矩阵解

$$\boldsymbol{b}_N=(\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_N)^{-1}\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_N=\boldsymbol{C}_N\cdot\boldsymbol{B}_N$$

设 y_{N+1} 为新增加的一个测量值，与 y_{N+1} 相对应的自变量值为(x_{N+11}，x_{N+12}，…，x_{N+1M})，新的系数矩阵为

$$\boldsymbol{X}_{N+1}=\begin{bmatrix}1 & x_{11} & \cdots & x_{1M}\\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2M}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{NM}\\ 1 & x_{N+11} & \cdots & x_{N+1M}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_N\\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}=(1\quad x_{N+11}\quad x_{N+12}\quad\cdots\quad x_{N+1M})$。

设 $\boldsymbol{Y}_{N+1}$，$\boldsymbol{b}_{N+1}$分别为测量值增加后的观测值矩阵和回归系数矩阵

$$\boldsymbol{Y}_{N+1}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N\\ y_{N+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_N\\ y_{N+1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_{N+1}=\begin{bmatrix}b_0'\\ b_1'\\ \vdots\\ b_M'\end{bmatrix}$$

由公式(9-63)知，新的回归系数矩阵解为

$$\boldsymbol{b}_{N+1}=(\boldsymbol{X}_{N+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{N+1})^{-1}\boldsymbol{X}_{N+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{N+1}=\boldsymbol{C}_{N+1}\boldsymbol{B}_{N+1}$$

式中：$\boldsymbol{C}_{N+1}=(\boldsymbol{X}_{N+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{N+1})^{-1}$，$\boldsymbol{B}_{N+1}=\boldsymbol{X}_{N+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{N+1}$

将 $\boldsymbol{X}_{N+1}$的展开式代入 $\boldsymbol{C}_{N+1}$得

$$\boldsymbol{C}_{N+1}=\left[\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_N\\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_N\\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right]^{-1}=(\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_N+\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{C}_N^{-1}+\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

引理：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD}$ 为非奇异方阵，则下列等式成立

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1}$$

证明：通过直接运算有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})[\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1}]$$

$$= \boldsymbol{E}$$

$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。

由引理知 $\boldsymbol{C}_{N+1}=\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N$。

将 $\boldsymbol{X}_{N+1}$、$\boldsymbol{Y}_{N+1}$ 的展开式代入 $\boldsymbol{B}_{N+1}$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{N+1} &= \boldsymbol{X}_{N+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{N+1}\\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_N\\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_N\\ y_{N+1}\end{bmatrix}\\ &= (\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_N+\boldsymbol{Z}y_{N+1})\\ &= \boldsymbol{B}_N+\boldsymbol{Z}y_{N+1}\end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{C}_{N+1}$、$\boldsymbol{B}_{N+1}$ 的展开式代入 $\boldsymbol{b}_{N+1}$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_{N+1} &= \boldsymbol{C}_{N+1}\cdot\boldsymbol{B}_{N+1}\\ &= \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{B}_N-\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{B}_N+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}y_{N+1}-\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}(1+\\ &\quad \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}y_{N+1}\end{aligned}$$

将上式后两项归并整理得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}[(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}]y_{N+1}\\ &= \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}y_{N+1}\end{aligned}$$

将上式代入 $\boldsymbol{b}_{N+1}$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_{N+1} &= \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{B}_N+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}(y_{N+1}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{B}_N)\\ &= \boldsymbol{b}_N+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}(y_{N+1}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_N)\end{aligned}$$

令
$$\boldsymbol{k}_{N+1}=(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z} \tag{9-71}$$

则
$$\boldsymbol{b}_{N+1}=\boldsymbol{b}_N+\boldsymbol{k}_{N+1}(y_{N+1}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_N) \tag{9-72}$$

将 $\boldsymbol{k}_{N+1}$ 代入 $\boldsymbol{C}_{N+1}$ 得

$$\boldsymbol{C}_{N+1}=\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{k}_{N+1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N \tag{9-73}$$

式(9-71)、(9-72)和(9-73)构成了回归系数递推解的计算公式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_{N+1} &= (1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{b}_{N+1} &= \boldsymbol{b}_N+\boldsymbol{k}_{N+1}(y_{N+1}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_N)\\ \boldsymbol{C}_{N+1} &= \boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{k}_{N+1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\end{aligned}$$

式中，$(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{Z})^{-1}$ 和 $(y_{N+1}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_N)$ 是两个标量，它们的计算结果是两个纯数；上式中所有计算不需要计算逆矩阵，计算效率大大提高。

二、计算步骤

(1) 计算 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的初始值 $\boldsymbol{b}_N$、$\boldsymbol{C}_N$

根据起始的 N 组数据和式(9-63)有

$$\boldsymbol{C}_N=(\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_N)^{-1}$$

$$B_N = X_N^T Y_N$$

$$b_N = C_N \cdot B_N$$

$$N \geqslant M + 2$$

(2) 计算 k_{N+1}

第一次新增加的测量值为 y_{N+1}，与之相对应的 Z 矩阵为

$$Z^T = (1 \quad x_{N+1,1} \quad x_{N+1,2} \quad \cdots \quad x_{N+1,M})$$

根据式(9-71)

$$k_{N+1} = (1 + Z^T C_N Z)^{-1} C_N Z$$

(3) 计算回归系数矩阵 b_{N+1}

首先计算回归系数增量 Δb，根据式(9-72)

$$\Delta b = k_{N+1}(y_{N+1} - Z^T b_N)$$

$$b_{N+1} = b_N + \Delta b$$

然后计算 C_{N+1} 的增量 ΔC，根据式(9-73)

$$\Delta C = -k_{N+1} Z^T C_N$$

$$C_{N+1} = C_N + \Delta C$$

(4) 重复(2)至(3)步，直至数据采样结束，这样把每增加一组数据后的回归方程系数全部解算出来。

【例 9-12】 自动补偿的水准仪居中误差与温度和湿度的变化量呈线性相关关系，测量时仪器对上述原因产生的误差自动修正，修正模型的计算采用递推回归方法，表 9-23 中的数据为一个样本，现进行递推回归计算。

表 9-23

序　号	温度增量 x_1/℃	湿度增量 x_2	误差 y/mm	回　归　方　程
1	1	1.5	1.0	
2	2	2.4	1.8	
3	3	3.6	2.5	
4	4	4.2	3.6	$y=0.528\,6+1.514\,3x_1-0.714\,3x_2$
5	5	5.1	4.2	$y=0.49+1.27x_1-0.5x_2$
6	6	5.8	5.0	$y=0.373\,7+1.024\,7x_1-0.250\,4x_2$

(1) 计算 b、C 的初始值 b_N，C_N

设回归模型为

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

取前 4 组数据计算 b_N、C_N，即：$N=4$，$M=2$

由式(9-63)知

$$X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 2 & 2.4 \\ 1 & 3 & 3.6 \\ 1 & 4 & 4.2 \end{bmatrix} \qquad Y_4 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.8 \\ 2.5 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

$$C_4=(X_4^T X_4)^{-1}=\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}9.09 & 10.53 & -12\\ 10.53 & 17.55 & -18.6\\ -12 & -18.6 & 20\end{bmatrix}$$

$$B_4=X_4^T Y_4=\begin{bmatrix}8.9\\ 26.5\\ 29.94\end{bmatrix}$$

$$b_4=C_4\cdot B_4=\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}0.666\\ 1.908\\ -0.9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5286\\ 1.5143\\ -0.7143\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

则初始的回归方程为

$$\hat{y}=0.5286+1.5143x_1-0.7143x_2$$

(2) 计算 k_5

新增加的测量数据为

$$y_5=4.2\qquad Z^T=(1\quad 5\quad 5.1)$$

根据式(9-71)计算 k_5。

$$k_5=(1+Z^T C_4 Z)^{-1}C_4 Z$$

$$C_4 Z=\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}0.54\\ 3.42\\ -3.0\end{bmatrix}$$

$$Z^T C_4 Z=2.34\div 1.26=1.8571$$

$$k_5=(1+1.8571)^{-1}\times\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}0.54\\ 3.42\\ -3.0\end{bmatrix}=\frac{0.35}{1.26}\begin{bmatrix}0.54\\ 3.42\\ -3.0\end{bmatrix}$$

(3) 计算回归系数矩阵 b_5 和 C_5

首先计算回归系数增量 Δb，根据式(9-72)

$$\Delta b=k_5(y_5-Z^T b_4)$$

$$Z^T b_4=4.4571$$

$$\Delta b=k_5(4.2-4.4571)$$

$$=-\frac{0.09}{1.26}\begin{bmatrix}0.54\\ 3.42\\ -3.0\end{bmatrix}$$

$$b_5=b_4+\Delta b=\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}0.666\\ 1.908\\ -0.9\end{bmatrix}-\frac{0.09}{1.26}\begin{bmatrix}0.54\\ 3.42\\ -3.0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}0.6174\\1.6002\\-0.63\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.49\\1.27\\-0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix}$$

则第一次新增测量数据后的回归方程为

$$\hat{y}=0.49+1.27x_1-0.5x_2$$

然后计算 $\boldsymbol{C}_5$ 的增量 $\Delta\boldsymbol{C}$，根据式(9-73)

$$\Delta\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{k}_5\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_4$$

$$=-\frac{0.35}{1.26^2}\begin{bmatrix}0.2916 & 1.8468 & -1.62\\1.8468 & 11.6964 & -10.26\\-1.62 & -10.26 & 9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_5=\boldsymbol{C}_4+\Delta\boldsymbol{C}$$

$$=\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}9.009 & 10.017 & -11.55\\10.017 & 14.301 & -15.75\\-11.55 & -15.75 & 17.5\end{bmatrix}$$

(4) 计算第二次新增数据后的回归系数

第二次新增加的数据为

$$y_6=5.0 \qquad \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}=(1 \quad 6 \quad 5.8)$$

计算 $\boldsymbol{k}_6$。

$$\boldsymbol{k}_6=(1+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_5\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}_5\boldsymbol{Z}$$

$$=\frac{0.3291}{1.26}\begin{bmatrix}2.121\\4.473\\-4.550\end{bmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{b}_6$ 的增量 $\Delta\boldsymbol{b}$。

$$\Delta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{k}_6(y_6-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_5)$$

$$=\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}-0.14657\\-0.309103\\0.314424\end{bmatrix}$$

计算回归系数矩阵 $\boldsymbol{b}_6$。

$$\boldsymbol{b}_6=\boldsymbol{b}_5+\Delta\boldsymbol{b}$$

$$=\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}0.6174\\1.6002\\-0.63\end{bmatrix}+\frac{1}{1.26}\begin{bmatrix}-0.14657\\-0.309103\\0.314424\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.37367\\1.02468\\-0.25046\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix}$$

第二次新增测量数据后的回归方程为：

$$\hat{y}=0.373\ 67+1.024\ 68x_1-0.250\ 46x_2$$

习题九

9-1 根据以下数据，拟合 y 与 x 之间的线性关系(设 x 无误差)。

x	10	20	30	40	50	60
y	70	94	125	142	169	198

9-2 在一元线性回归分析中，若规定回归方程必须过坐标系的原点，试建立这一类回归方程的数学模型，并推导回归方程系数的计算公式。

9-3 在一元线性回归分析中，当观测数据的数字比较庞杂时，对数据作适当变换可以简化计算，设变换关系为

$$x'=d_1(x-c_1) \qquad y'=d_2(x-c_2)$$

求证：

$$\bar{x}=c_1+\frac{\bar{x}'}{d_1}; \ \bar{y}=c_2+\frac{\bar{y}'}{d_2}$$

$$l_{xx}=\frac{1}{d_1^2}l_{xx}; \ l_{xy}=\frac{1}{d_1d_2}l_{xy}; \ l_{yy}=\frac{1}{d_2^2}l_{yy}$$

9-4 在制定公差标准时，必须掌握加工的误差随工件尺寸变化的规律。例如，对用普通车床切削外圆进行了大量实验，得到加工误差 Δ 与工件直径 D 的统计数据如下：

D/mm	5	10	50	100	150	200	250	300	350	400
Δ/μm	8	11	18	24	26	30	33	35	36	37

求 Δ 与 D 之间的关系经验公式，并进行 F 检验($p=0.95$)。

9-5 下表数据是退火温度对黄铜延展性影响的试验结果。

退火温度 x/℃	300	400	500	600	700	800
黄铜延展性 $y\times100$	40	50	55	60	67	70

(1) 求 y 对 x 的线性回归方程，并进行显著性检验($p=0.99$)。

(2) 适火温度为550℃时，黄模的延展性是多少?

9-6 在重复试验的回归分析问题中，设变量 x 取 N 个试验点，每个试验点处对变量 y 重复观测 m 次。求证：用全部 mN 个数据点求出的 y 对 x 回归方程与用 y 平均值的 N 个数据点求出的回归方程相同。

9-7 在4种不同温度下观测某化学反应生成物含量的百分数，每种在同一温度下重复观测3次，数据如下：

温度 x/℃	150			200			250			300		
生成物含量的百分数 y(%)	77.4	76.7	78.2	84.1	84.5	83.7	88.9	89.2	89.7	94.8	94.7	95.9

求 y 对 x 的线性回归方程，并进行方差分析和显著性检验($p=0.95$)。

9-8 在医学检查中，用显微镜对红血细胞计数是一项耗时又不准确的工作。但是对填充细胞体进行测量却容易得多。为了求出这两者之间的关系，从20只狗身上抽取了血样，对每份血样，测量其填充细胞体 x 及相应的红血细胞数 y，得到资料如下表：

填充细胞体 x/mm	45	42	56	18	42	35	58	40	39	50
红血细胞数 $y\times10^6$	6.35	6.30	9.52	7.50	6.99	5.90	9.49	6.20	6.55	8.72
填充细胞体 x/mm	53	47	46	36	55	53	42	36	37	51
红血细胞数 $y\times10^6$	8.94	7.80	7.25	5.72	9.54	8.38	6.35	5.89	5.94	8.07

用分组平均法求红血细胞数 y 对填充细胞体 x 的线性回归方程。

9-9 用直线检验法验证下列数据可以用曲线 $y=x/(a+bx)$ 表示。

x	0.52	0.41	0.33	0.29	0.25	0.22	0.20
y	132	118	105	98	89	83	77

9-10 用表差法验证下列数据可以用曲线 $y=a+bx+cx^2$ 表示。

x	0.20	0.50	0.70	1.20	1.60	2.10	2.50	2.80	3.20	3.70
y	4.22	4.32	4.45	5.33	6.68	8.91	11.22	13.39	16.53	21.20

9-11 根据理论分析，筒子纱电阻 R 与回潮率 M 的数值关系是：$10^M=aR^b$，在20℃条件下，对14号筒子纱实测结果如下：

M(%)	4.42	6.14	6.43	7.07	7.28	8.52	9.16
$R/10^6\Omega$	41000	1790	852	331	266	33.2	11.1

试确定参数 a，b 以获得由电阻估计回潮率的计算公式。

9-12 炼焦炉的焦化时间 y 与炉宽 x_1 及烟道管相对温度 x_2 的数据如下：

y/min	6.40	15.05	18.75	30.25	44.85	48.94	51.55	61.50	100.44	111.42
x_1/m	1.32	2.69	3.56	4.41	5.35	6.20	7.12	8.87	9.80	10.65
x_2	1.15	3.40	4.10	8.75	14.82	15.15	15.32	18.18	35.19	40.40

求回归方程 $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2$，并检验回归方程的效果。

9-13 已知参数 x 对 y 的影响为线性的，影响量是根据实测数据自动建模进行实时修正，设 $y=a+bx$，a，b 的初始值由下列数据计算：

x/℃	5	6	7
y/mV	8.0	9.1	9.8

然后每增加一组数据，就重新建模一次，现依次增加3组测量数据(见下表)，试用递推回归方法求出每次新增数据后的回归方程。

序　号	1	2	3
x/℃	8	9	10
y/mV	10.6	11.8	12.6

附表 1

拉普拉斯函数 $\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du$ 值

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.000 0	0.004 0	0.008 0	0.012 0	0.016 0	0.019 9	0.023 9	0.027 9	0.031 9	0.035 9
0.1	0.039 8	0.043 8	0.047 8	0.051 7	0.055 7	0.059 6	0.063 6	0.067 5	0.071 4	0.075 3
0.2	0.079 3	0.083 2	0.087 1	0.091 0	0.094 8	0.098 7	0.102 6	0.106 4	0.110 3	0.114 1
0.3	0.117 9	0.121 7	0.125 5	0.129 3	0.133 1	0.136 8	0.140 6	0.144 3	0.148 0	0.151 7
0.4	0.155 4	0.159 1	0.162 8	0.166 4	0.170 0	0.173 6	0.177 2	0.180 8	0.184 4	0.187 9
0.5	0.191 5	0.195 0	0.198 5	0.201 9	0.205 4	0.208 8	0.212 3	0.215 7	0.219 0	0.222 4
0.6	0.225 7	0.229 1	0.232 4	0.235 9	0.238 9	0.242 2	0.245 4	0.248 6	0.251 7	0.254 9
0.7	0.258 0	0.261 1	0.264 2	0.267 3	0.270 3	0.273 4	0.276 4	0.279 4	0.282 3	0.285 2
0.8	0.288 1	0.291 0	0.293 9	0.296 7	0.299 5	0.302 3	0.305 1	0.307 8	0.310 6	0.313 3
0.9	0.315 9	0.318 6	0.321 2	0.323 8	0.326 4	0.328 9	0.331 5	0.334 0	0.336 5	0.338 9
1.0	0.341 3	0.343 8	0.346 1	0.348 5	0.350 8	0.353 1	0.355 4	0.357 7	0.359 9	0.362 1
1.1	0.364 3	0.366 5	0.368 6	0.370 8	0.372 9	0.374 9	0.377 0	0.379 0	0.381 0	0.383 0
1.2	0.384 9	0.386 9	0.388 9	0.390 7	0.392 5	0.394 4	0.396 2	0.398 0	0.399 7	0.401 5
1.3	0.403 2	0.404 9	0.406 6	0.408 2	0.409 9	0.411 5	0.413 1	0.414 7	0.416 2	0.417 1
1.4	0.419 2	0.420 7	0.422 2	0.423 6	0.425 1	0.426 5	0.427 9	0.429 2	0.430 6	0.431 9
1.5	0.433 2	0.434 5	0.435 7	0.437 0	0.438 2	0.439 4	0.440 6	0.441 8	0.442 9	0.444 1
1.6	0.445 2	0.446 3	0.447 4	0.448 4	0.449 5	0.450 5	0.451 5	0.452 5	0.453 5	0.454 5
1.7	0.455 4	0.456 1	0.457 3	0.458 2	0.459 1	0.459 9	0.460 8	0.461 6	0.462 5	0.463 3
1.8	0.464 1	0.464 9	0.465 6	0.466 4	0.467 1	0.467 8	0.468 6	0.469 3	0.469 9	0.470 6
1.9	0.471 3	0.471 9	0.472 6	0.473 2	0.473 8	0.474 4	0.475 0	0.485 6	0.476 1	0.476 7
2.0	0.477 2	0.477 8	0.478 3	0.478 8	0.479 3	0.479 8	0.480 3	0.480 8	0.481 2	0.481 7
2.1	0.482 1	0.462 6	0.483 0	0.483 4	0.483 8	0.484 2	0.484 6	0.485 0	0.485 4	0.485 7
2.2	0.486 1	0.486 4	0.486 8	0.487 1	0.487 4	0.487 8	0.488 1	0.488 4	0.488 7	0.489 0
2.3	0.489 3	0.489 6	0.489 8	0.490 1	0.490 4	0.490 6	0.490 9	0.491 1	0.491 3	0.491 6
2.4	0.491 8	0.492 0	0.492 2	0.492 5	0.492 7	0.492 9	0.493 1	0.493 2	0.493 4	0.493 6
2.5	0.493 8	0.494 0	0.494 1	0.494 3	0.494 5	0.494 6	0.494 8	0.494 9	0.495 1	0.495 2
2.6	0.495 3	0.495 5	0.495 6	0.495 7	0.495 9	0.496 0	0.486 1	0.496 2	0.496 3	0.496 4
2.7	0.496 5	0.496 6	0.496 7	0.496 8	0.496 9	0.497 0	0.497 1	0.497 2	0.497 3	0.497 4
2.8	0.497 4	0.497 5	0.497 6	0.497 7	0.497 7	0.497 8	0.497 9	0.497 9	0.498 0	0.498 1
2.9	0.498 1	0.498 2	0.498 2	0.498 3	0.498 4	0.498 4	0.498 5	0.498 5	0.498 6	0.498 6
3.0	0.498 7	0.498 7	0.498 7	0.498 8	0.498 8	0.498 9	0.498 9	0.498 9	0.499 0	0.499 0
3.1	0.499 0	0.499 1	0.499 1	0.499 1	0.499 2	0.499 2	0.499 2	0.499 2	0.499 3	0.499 3
3.2	0.499 3	0.499 3	0.499 4	0.499 4	0.499 4	0.499 4	0.499 4	0.499 5	0.499 5	0.499 5
3.3	0.499 5	0.499 5	0.499 5	0.499 6	0.499 6	0.499 6	0.499 6	0.499 6	0.499 6	0.499 7
3.4	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 7	0.499 8